§ 4. SÉRIE SINGULIÈRE ET INTÉGRALE SINGULIERE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cette dernière inégalité est une conséquence de la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f^r} Q(\xi)^{-\Omega+2\varepsilon}\, d\xi_f\,.$$

Enfin nous pouvons appliquer à l'inégalité (3.16) les quatre majorations obtenues ci-dessus. Il vient

$$\left| \int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\, \psi\,(<\xi, -\nu>)\, d\xi \right| \ll P^{n-rd-\varepsilon\Delta}\,.$$

En posant $\delta_3 = \varepsilon\Delta$ on achève cette démonstration. □

§ 4. Série singulière et intégrale singulière

Une conséquence évidente du Théorème 3 est que la transformée de Gauss globale F^* est intégrable sur $\mathbf{A}^r$. Ainsi sa transformée de Fourier, notée $\widehat{F^*}$, existe. Nous pouvons donc obtenir, grâce aux Théorèmes 1, 2 et 3, le résultat asymptotique suivant qui est essentiel dans ce travail.

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses (H1) et (H2) et en utilisant les notations introduites dans les précédents paragraphes, il vient :*

Pour toute boîte $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$, *pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}) \tag{4.1}$$

et le membre de gauche de cette égalité est égal au nombre de $x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n$ *et tels que* $f(x) = \nu$.

Démonstration. On a déjà expliqué, dans l'introduction de ce travail, l'égalité essentielle

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\, \psi\,(<\xi, -\nu>) d\xi = \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x)\,.$$

Compte tenu du sens donné au paragraphe 2 aux ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}(\mathscr{B})$, le membre de droite de cette dernière égalité est exactement le nombre de solutions entières du système $f(x) = \nu$, situées dans la boîte $P\mathscr{B}$.

Enfin, pour Δ suffisamment petit et pour $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, on peut appliquer simultanément les Théorèmes 1, 2 et 3. En posant $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, on obtient la formule asymptotique (4.1). □

Il faut désormais étudier la fonction F^* pour montrer qu'elle constitue bien la partie principale de la formule asymptotique (4.1). Pour cela, les hypothèses (H3) et (H4) seront utilisées.

Nous avons l'égalité

$$\widehat{F^*}(-\nu) = \widehat{F^*_\infty}(-\nu) \prod_P \widehat{F^*_P}(-\nu)\,; \tag{4.2}$$

le produit infini portant sur les places finies s'appelle classiquement « Série singulière », les lemmes 4.2, 3 et 4 lui sont consacrés.

La quantité $\widehat{F^*_\infty}(-\nu)$ s'appelle « Intégrale singulière » et concerne la place infinie. Son traitement est l'une des difficultés du travail de Birch et donc aussi du présent travail ; il occupe les lemmes 4.5 et 6.

Rappelons que, dans tout ce travail, on prend $r \leqslant n$ et considérons une application $g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^r$, polynomiale à coefficients entiers.

Notons $Dg(x)$, la matrice jacobienne de l'application g en $x \in \mathbf{Z}^n$.

Disons pour simplifier que $Dg(x)$ est d'ordre $l \geqslant 1$ s'il existe un déterminant extrait d'ordre r qui soit divisible par p^{l-1} et non divisible par p^l.

LEMME 4.2 (Hensel). *Soit* $l \geqslant 1$ *et* $x_0 \in \mathbf{Z}^n$ *tels que*

1) $g(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1}}$.

2) $Dg(x_0)$ *est d'ordre* l.

Alors, pour tout entier $\mu \geqslant 0$, *le système de congruences*

$$g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$$

admet au moins $p^{(n-r)\mu}$ *solutions* y, *non congrues deux à deux* $\pmod{p^{l+\mu}}$ *et telles que* $Dg(y)$ *soit d'ordre* l.

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier μ ; pour $\mu = 0$ il s'agit de l'hypothèse.

Admettons le lemme vrai pour μ et choisissons $x \in \mathbf{Z}^n$, tel que $g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$ et $Dg(x)$ est d'ordre l.

Alors en utilisant la formule de Taylor où les $\dfrac{1}{k!}$ sont de « faux » dénominateurs ! il vient

$$g(x + u\,p^{l+\mu}) \equiv g(x) + p^{l+\mu} Dg(x)(u) \pmod{p^{2l+2\mu}}. \tag{4.2}$$

Avec $a \in \mathbf{Z}^r$, on peut écrire

$$g(x) \equiv a\, p^{2l-1+\mu}. \tag{4.3}$$

Compte tenu des congruences (4.2) et (4.3), nous aurons la congruence

$$g(x+up^{l+\mu}) \equiv 0 \pmod{p^{2l+\mu}} \tag{4.4}$$

si et seulement si

$$a\, p^{2l-1+\mu} + p^{l+\mu}\, Dg(x)\,(u) \equiv 0 \pmod{p^{2l+\mu}},$$

c'est-à-dire

$$a\, p^{l-1} + Dg(x)\,(u) \equiv 0 \pmod{p^l} \tag{4.5}$$

Mais la congruence (4.5) est un système linéaire en $u = (u_1, ..., u_n)$ à coefficients dans l'anneau $\mathbf{Z}/p^l\,\mathbf{Z}$. La méthode usuelle de résolution d'un système linéaire est valable tant qu'il ne s'agit pas de diviser. Puisque $Dg(x)$ est d'ordre l, il existe un déterminant extrait d'ordre r égal à bp^{l-1}, avec $b \not\equiv 0 \pmod p$. Notons ce déterminant $\det[\alpha_1, ..., \alpha_r]$, les α_j désignant ses colonnes.

A partir de ce déterminant, on définit classiquement des équations et inconnues principales et on se ramène à la résolution usuelle du système restreint (les $n-r$ inconnues non principales étant devenues des paramètres) et aux formules classiques de Cramer:

Pour chaque $i \in [1, n]$, on a

$$u_i \det[\alpha_1, ..., \alpha_r] \equiv \det[\alpha_1, ..., -ap^{l-1}, ..., \alpha_r] \pmod{p^l}$$

qui devient

$$u_i\, b\, p^{l-1} \equiv p^{l-1} \det[\alpha_1, ..., -a, ..., \alpha_r] \pmod{p^l}$$

et enfin

$$u_i\, b \equiv \det[\alpha_1, ..., -a, ..., \alpha_r] \pmod{p}.$$

Il en résulte le calcul de $u_i \pmod p$ puisque b est inversible $\pmod p$. Comme il y avait $(n-r)$ inconnues non principales, on obtient p^{n-r} solutions $u = (u_1, ..., u_n)$ distinctes $\pmod p$; écrivons les solutions ainsi obtenues de la congruence (4.4.)

$$y = x + u\, p^{l+\mu};$$

ces dernières sont non congruentes deux à deux (mod $p^{l+\mu+1}$) et elles le sont encore moins si elles proviennent de deux x non congrus (mod $p^{l+\mu}$); d'après l'hypothèse de récurrence, il y en a donc

$$p^{n-r}\, p^{\mu(n-r)} = p^{(\mu+1)(n-r)}.$$

Enfin, on a $y \equiv x \pmod{p^{l+\mu}}$ et donc aussi (mod p^{l-1}) et (mod p^l), ce qui entraîne que $Dg(y)$ est aussi d'ordre l.

La démonstration par récurrence est donc complète. □

COROLLAIRE. *Soit* $z \in \mathbf{Z}_p^n$ *une solution* non singulière *du système* $g(x) = 0$, *alors il existe* $l \geqslant 1$, *tel que pour tout entier* $\mu \geqslant 0$, *le système de congruences* $g(x) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1+\mu}}$ *admette au moins* $p^{(n-r)\mu}$ *solutions dans* $(\mathbf{Z}/p^{2l-1+\mu}\mathbf{Z})^n$.

Démonstration. Puisque z est non singulier, il existe un déterminant extrait de $Dg(z)$ d'ordre r et non nul.

Comme $z \in \mathbf{Z}_p^n$ et que les coefficients de g sont entiers, il existe $l \geqslant 1$ et $b \in \mathbf{Z}_p^x = \{$unités p-adiques$\}$, tels que $Dg(z) = b\, p^{l-1}$.

En réduisant modulo $\mathbf{Z}_p^{2l-1}$ et puisque

$$(\mathbf{Z}_p/p^{2l-1}\mathbf{Z}_p) \simeq (\mathbf{Z}/p^{2l-1}\mathbf{Z}),$$

on trouve un élément $x_0 \in \mathbf{Z}^n$ tel que $g(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{2l-1}}$ et $Dg(x_0)$ est d'ordre l. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4.2 pour achever la démonstration de ce corollaire. □

LEMME 4.3. *Avec les notations précédentes, on a, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$.

$$\widehat{F_p^*}(-\nu) = \lim_{k\to\infty} \frac{\text{Nombre de solutions de } f(x) \equiv \nu \pmod{p^k}}{p^{k(n-r)}} \tag{4.6}$$

Démonstration. Puisque $\widehat{F^*}$ existe et est décomposable, la fonction locale $\widehat{F_p^*}$ existe *a fortiori* et on a

$$\begin{aligned}\widehat{F_p^*}(-\nu) &= \int_{\mathbf{Q}_p^r} \psi_p(<\xi_p, -\nu>) \Big[\int_{\mathbf{Q}_p^n} \varphi_p(x_p)\, \psi_p(<\xi_p, f(x_p)>) dx_p\Big]\, d\xi_p \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{|\xi_p|_p \leqslant p^k} \Big[\int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<\xi_p, f(x_p)-\nu>) dx_p\Big]\, d\xi_p .\end{aligned} \tag{4.7}$$

Mais, pour $|\xi_p|_p \leqslant p^k$, nous avons obtenu, au lemme 1.1, l'égalité

$$\int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<\xi_p, f(x_p)-\nu>)d\,x_p = p^{-kn} \sum_{u\in(\mathbf{Z}/p^k\,\mathbf{Z})^n} \psi_p(<\xi_p, f(u)-\nu>).$$

Comme l'ensemble $\{\xi_p \in \mathbf{Q}_p^r \mid |\xi_p|_p \leqslant p^k\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Q}_p^r$ dont l'application $\xi_p \mapsto \psi_p(<\xi_p, f(u)-\nu>)$ est un caractère, l'intégrale de ce caractère sur ce sous-groupe est nulle si le caractère n'y est pas trivial et vaut la mesure du sous-groupe: p^{kr}, si le caractère y est trivial. Or cette trivialité est équivalente à la condition

$$(f(u)-\nu) \in p^k\,\mathbf{Z}_p^r$$

ou encore:

u est solution du système de congruences $f(u) \equiv \nu \pmod{p^k}$.

Tout ceci montre bien que l'égalité (4.7) n'est autre que l'égalité (4.6). □

Nous pouvons maintenant préciser la situation sur les places finies.

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *on a*

$$\prod_P \widehat{F_P^*}(-\nu) > 0\,.$$

Remarque. Ce produit infini est indépendant de la variable P puisque celle-ci n'affecte que la place infinie.

Démonstration. Puisque la fonction $\widehat{F^*}$ existe et est décomposable, l'égalité (4.2) montre que le produit infini étudié ici est convergent; il sera donc non nul (c'est-à-dire > 0) si et seulement si tous ses facteurs sont non nuls.

Posant $g = f - \nu$, l'hypothèse (H3) donnant une solution non singulière dans tout $\mathbf{Z}_p^n$ au système $g(x) = 0$, nous pouvons appliquer le corollaire du lemme 4.2:

Il existe $l \geqslant 1$ tel que le système de congruences

$$f(x) \equiv \nu \pmod{p^{2l-1+\mu}} \tag{4.8}$$

admette, pour tout entier $\mu \geqslant 0$, au moins $p^{(n-r)\mu}$ solutions. Donc, en notant $N_p(2l-1+\mu)$ le nombre de solutions du système (4.8), il vient

$$N_p(2l-1+\mu) \geqslant p^{(n-r)\mu}\,,$$

$$\frac{N_p(2l-1+\mu)}{p^{(2l-1+\mu)(n-r)}} \geqslant \frac{1}{p^{(2l-1)(n-r)}}\,.$$

Enfin, quand $\mu \to +\infty$, le membre de gauche de cette dernière inégalité admet une limite donnée par le lemme 4.3, on en déduit

$$\widehat{F_p^*}(-\nu) \geqslant \frac{1}{p^{(2l-1)(n-r)}} > 0$$

ce qui achève cette démonstration. □

Il faut maintenant étudier l'intégrale singulière $\widehat{F_\infty^*}(-\nu)$. Afin que l'exposé soit complet, nous démontrons d'abord un lemme technique.

Notons, pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$:

$$V(\mu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \mu\}.$$

Remarque. $V(\mu)$ peut être vide.

LEMME 4.5. *Soit* x_0 *un point* non singulier *de* $V(0)$, *alors les trois propositions suivantes sont vraies:*

i) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x_0 *et il existe* $\alpha > 0$ *tels que*

$$\{V(\mu) \cap U \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{|\mu| < \alpha\}.$$

ii) *Pour tout* μ, *tel que* $|\mu| < \alpha$, *il existe une mesure positive* dw_μ *sur* $V(\mu) \cap U$ *telle que, pour toute fonction* φ, *continue et à support compact inclus dans* U, *on ait l'égalité*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{|\mu|<\alpha} \Big[\int_{V(\mu)\cap U} \varphi dw_\mu\Big]\, d\mu \tag{4.9}$$

et, de plus, la fonction $\mu \mapsto \int_{V(\mu)\cap U} \varphi dw_\mu$ *est continue sur l'ouvert* $\{|\mu| < \alpha\}$.

iii) *Il existe une fonction* φ, *continue et à support compact inclus dans* U, *avec* $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ *et telle qu'il existe* $\beta > 0$ *et, pour tout* μ, *avec* $|\mu| < \frac{\alpha}{2}$, *l'inégalité*

$$\int_{V(\mu)\cap U} \varphi dw_\mu \geqslant \beta. \tag{4.10}$$

Remarque. U peut être aussi petit qu'on le veut.

Démonstration. Rappelons que $r \leqslant n$ et considérons x_0, un point non singulier de l'ensemble $V(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

Supposons, quitte à réindexer les coordonnées x_i de x, que

$$\frac{D(f_1, ..., f_r)}{D(x_1, ..., x_r)} \neq 0 \tag{4.11}$$

(il s'agit, selon une notation usuelle, du déterminant extrait principal d'ordre r de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ au point x_0).

Considérons l'application h de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\begin{aligned} &h(x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n) \\ &= (y_1 = f_1(x), ..., y_r = f_r(x), y_{r+1} = x_{r+1}, ..., y_n = x_n) ; \end{aligned}$$

la matrice jacobienne de l'application h au point x_0 est

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline N & I_{n-r} \end{array}\right)$$

où I_{n-r} est la matrice identité d'ordre $(n-r)$ et $M = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$;

puisque

$$\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} M = \frac{D(f_1, ..., f_r)}{D(x_1, ..., x_r)} \neq 0 ,$$

le point x_0 est un point non singulier de l'application h.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ et un voisinage ouvert W de $h(x_0)$ dans $\mathbf{R}^n$ tels que l'application

$$U \xrightarrow{h} W \tag{4.12}$$

soit un isomorphisme analytique.

On peut réduire W à un hypercube de centre $h(x_0)$, ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que

$$W = \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leqslant i \leqslant r) \mid t_i \mid < \alpha \quad \text{et} \quad (r+1 \leqslant j \leqslant n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \alpha\}$$

Soit alors $\mu \in \mathbf{R}^r$ et soit aussi

$$\begin{aligned} W_\mu &= W \cap (\mu_1, ..., \mu_r) \times \mathbf{R}^{n-r} \\ &= \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leqslant i \leqslant r)\, t_i = \mu_i \quad \text{et} \quad (r+1 \leqslant j \leqslant n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \alpha\} . \end{aligned}$$

On a clairement

$$\{W_\mu \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{|\mu| < \alpha\}$$

et par la bijection (4.12) on obtient

$$\{W_\mu \neq \emptyset\} \Leftrightarrow \{V(\mu) \cap U \neq \emptyset\};$$

la proposition i) est donc démontrée.

L'application h définit, par restriction, une carte locale

$$V(\mu) \cap U \xrightarrow{h} W_\mu$$

si et seulement si $|\mu| < \alpha$; on peut alors utiliser h^{-1} pour définir sur $V(\mu) \cap U$ la mesure image de la mesure de Lebesgue sur W_μ; si J désigne le jacobien, il s'agit de la mesure

$$dw_\mu = |J(h^{-1})(\mu_1, ..., \mu_r, y_{r+1}, ..., y_n)| \, dy_{r+1} ... dy_n$$

définie, par exemple, pour les fonctions continues à support compact inclus dans $V(\mu) \cap U$; rappelons enfin l'égalité

$$J(h^{-1}) = \left[\frac{D(f_1, ..., f_r)}{D(x_1, ..., x_r)}\right]^{-1}$$

Soit maintenant une application $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, continue et à support compact inclus dans l'ouvert U; par la formule usuelle de changement de variable (représenté ici par l'isomorphisme analytique (4.12)) dans les intégrales multiples, on obtient le calcul suivant

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \circ h^{-1}(y_1, ..., y_n) \, |J(h^{-1})(y_1, ..., y_n)| \, dy_1 ... dy_n \\ &= \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{W_\mu} \varphi \circ h^{-1} \, |J(h^{-1})| \, dy_{r+1} ... dy_n\right] dy_1 ... dy_r \\ &= \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu\right] d\mu .\end{aligned}$$

L'égalité (4.9) est donc démontrée. De plus il est clair que la fonction

$$\mu \mapsto \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu$$

est continue pour $|\mu| < \alpha$. La proposition ii) est donc vraie.

Choisissons maintenant une fonction φ, continue à support compact inclus dans $U = h^{-1}(W)$ et obéissant aux deux conditions suivantes:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1$$

et

$$\varphi^{-1}(\{1\}) \supset h^{-1}(W'),$$

avec

$$W' = \{t \in \mathbf{R}^n \mid (1 \leqslant i \leqslant r) \mid t_i \mid < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad (r+1 \leqslant j \leqslant n) \mid t_j - x_{0,j} \mid < \frac{\alpha}{2}\}.$$

Une telle fonction φ existe puisque U est difféomorphe à W qui est un hypercube de $\mathbf{R}^n$, de même que W' dont la fermeture topologique est incluse dans W.

Prenons alors $\mu \in \mathbf{R}^r$, avec $\mid \mu \mid < \frac{\alpha}{2}$; on a donc

$$W'_\mu = W' \cap W_\mu \neq \emptyset$$

et le calcul suivant

$$\int_{V(\mu)\cap U} \varphi dw_\mu = \int_{W_\mu} \varphi \circ h^{-1} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n$$
$$\geqslant \int_{W'_\mu} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n,$$

où cette dernière inégalité résulte de la relation

$$\varphi \circ h^{-1}(W') = \{1\}.$$

Continuons le calcul:

$$\int_{W'_\mu} \mid J(h^{-1}) \mid dy_{r+1} \dots dy_n$$
$$= \int_{\substack{|y_j - x_{0,j}| \leqslant \frac{\alpha}{2} \\ (r+1 \leqslant j \leqslant n)}} \mid J(h^{-1})(\mu_1, \dots, \mu_r, y_{r+1}, \dots, y_n) \mid dy_{r+1} \dots dy_n$$

Or la fonction $\mid J(h^{-1}) \mid$ est continue, positive et *non nulle* sur W; elle admet donc sur la fermeture de W', qui est un compact inclus dans W, une borne inférieure $m > 0$.

Ainsi il vient, pour tout μ tel que $|\mu| < \frac{\alpha}{2}$:

$$\int_{V(\mu)\cap U} \varphi dw_\mu \geqslant m\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-r},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition iii) de ce lemme, en prenant

$$\beta = m\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-r} > 0.$$

□

Remarque. On peut montrer, mais c'est inutile pour démontrer le théorème 4, que la mesure dw_μ est indépendante de la carte locale choisie sur $V(\mu)$ au voisinage du point non singulier x_0. De plus les mesures ainsi obtenues se recollent sur l'ouvert θ_μ des points non singuliers de $V(\mu)$. Enfin, pour toute fonction continue à support compact inclus dans $\bigcup_\mu \theta_\mu$ (qui n'est autre que l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ constitué des points non singuliers de f) on dispose de la formule

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi dx = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_{\theta_\mu} \varphi dw_\mu\right] d\mu.$$

(sur ce sujet voir aussi le paragraphe 5.F).

Le lemme technique (4.5) nous permet d'aborder la démonstration principale concernant l'intégrale singulière.

LEMME 4.6. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H4), il existe une boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$ *et il existe* $\gamma > 0$ *tels que, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *et pour tout* P *supérieur à une valeur* $P(\nu)$ *dépendant seulement de* ν, *on ait l'inégalité*

$$\widehat{F^*_\infty}(-\nu) \geqslant \gamma P^{n-rd}.$$

Démonstration. La fonction $\widehat{F^*_\infty}$ existe puisque $F^*_\infty \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Il en résulte le calcul suivant où l'on pose $x = Pt$ puis $u = \xi_\infty P^d$.

$$\begin{aligned}
\widehat{F^*_\infty}(-\nu) &= \int_{\mathbf{R}^r}\left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(x)\psi_\infty(<\xi_\infty, f(x)>)dx\right]\psi_\infty(<\xi_\infty, -\nu>)d\xi_\infty \\
&= P^n \int_{\mathbf{R}^r}\left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt)\psi_\infty(<\xi_\infty P^d, f(t)>)dt\right]\psi_\infty(<\xi_\infty, -\nu>)d\xi_\infty \\
&= P^{n-rd} \int_{\mathbf{R}^r}\left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt)\psi_\infty(<u, f(t)-\nu P^{-d}>)dt\right]du.
\end{aligned}$$

Il faut donc étudier la fonction $\mathscr{T}(P, \nu)$ définie par l'égalité

$$\widehat{F_{\infty}^{*}}(-\nu) = P^{n-rd}\mathscr{T}(P, \nu);$$

on ne peut lui appliquer le théorème de Fubini car la fonction $u \mapsto \psi(<u, f(t)-\nu P^{-d}>)$ n'est généralement pas intégrable!

Aussi utilise-t-on une suite de fonctions positives à support compact: $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui, au sens des distributions, tend faiblement vers δ_0, la distribution de Dirac en 0. On sait que l'action de ces distributions porte sur les fonctions continues à support compact.

On sait aussi que la suite $(\hat{g}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement, toujours au sens des distributions, vers 1.

Ainsi il vient l'égalité

$$\mathscr{T}(P, \nu) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{T}_n(P, \nu)$$

avec

$$\mathscr{T}_n(P, \nu) = \int_{\mathbf{R}^r}\left[\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt)\psi_\infty(<u, f(t)-\nu P^{-d}>)dt\right]\hat{g}_n(u)du\,.$$

Nous pouvons cette fois appliquer le Théorème de Fubini, il suffit que $\hat{g}_n$ soit intégrable ce qui s'obtient sans peine en prenant g_n de classe C^∞ par exemple. On a donc

$$\mathscr{T}_n(P, \nu) = \int_{\mathbf{R}^r}\left[\int_{\mathbf{R}^n} \hat{g}_n(u)\psi_\infty(<u, f(t)-\nu P^{-d}>)du\right]\varphi_\infty(Pt)dt\,.$$

La formule d'inversion de Fourier est valable pour la fonction g_n, il en résulte l'égalité

$$\mathscr{T}_n(P, \nu) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\infty(Pt)g_n(\nu P^{-d}-f(t))dt\,. \tag{4.13}$$

Un premier avantage de l'égalité (4.13) est que l'intégrale porte sur des fonctions positives. Nous pouvons donc, en vue d'une minoration, utiliser toute fonction φ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^n$, on ait la double inégalité

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_\infty(Pt)\,.$$

D'après l'hypothèse (H4), le système $f = 0$ admet une solution x_0 non singulière dans $\mathbf{R}^n$. Choisissons une boîte $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$ telle que x_0 soit proche (autant qu'on le voudra puisque $\mathscr{S}$ est dense dans l'ensemble des boîtes $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$) du barycentre de $\mathscr{B}$.

Selon le lemme 4.5 i), il existe un voisinage ouvert U de x_0, aussi petit qu'on le veut et donc inclus dans la boîte $\mathscr{B}_1$ de même barycentre que $\mathscr{B}$ et de dimensions toutes moitiés de celles de $\mathscr{B}$.

Puisque nous avons par définition $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$, il est clair que la fonction $\varphi_\infty(Pt)$ prend la valeur 1 sur la boîte $\mathscr{B}_1$. *A fortiori*, pour tout $t \in U$ et pour tout P, on a la relation

$$\varphi_\infty(Pt) = 1 .$$

La fonction φ citée dans la proposition iii) du lemme 4.5 est donc telle que pour tout $t \in \mathbf{R}^n$, on ait la double inégalité

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_\infty(Pt) ;$$

l'égalité (4.13) conduit alors à l'inégalité

$$\mathscr{T}_n(P, \nu) \geqslant \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) g_n(\nu P^{-d} - f(t)) dt .$$

En appliquant le lemme 4.5 ii), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_n(P, \nu) &\geqslant \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi(t) g_n(\nu P^{-d} - f(t)) dw_\mu \right] d\mu \\ &\geqslant \int_{|\mu| < \alpha} \left[\int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu \right] g_n(\nu P^{-d} - \mu) d\mu . \end{aligned}$$

Soit alors la valeur $P(\nu)$ telle que, pour tout $P > P(\nu)$, on ait l'inégalité

$$| \nu P^{-d} | < \frac{\alpha}{2} ;$$

nous n'utiliserons pour terminer cette démonstration que des valeurs de P supérieures à la valeur $P(\nu)$.

Puisque, selon le lemme 4.5 ii), la fonction $\mu \mapsto \int_{V(\mu) \cap U} \varphi dw_\mu$ est continue pour $| \mu | < \alpha$ et qu'elle est clairement à support compact inclus dans cet ouvert de $\mathbf{R}^r$, on obtient, quand $n \to +\infty$, l'inégalité

$$\mathscr{T}(P, \nu) \geqslant \int_{V(\nu P^{-d}) \cap U} \varphi \, dw_{\nu P^{-d}} .$$

Enfin, le lemme 4.5 iii) dit que cette dernière intégrale est supérieure à une constante $\beta > 0$ qui ne dépend ni de $P > P(\nu)$, ni même de ν. Nous avons donc obtenu la minoration

$$\widehat{F^*_\infty}(-\nu) \geqslant \beta\, P^{n-rd}$$

valable pour tout $\nu \in \mathbf{Z}^r$ et tout $P > P(\nu)$. □

Remarque. Le lemme 4.6, suffisant pour ce travail, dit que l'intégrale singulière est, lorsque $P \to +\infty$, au moins d'ordre P^{n-rd}. On a bien sûr envie d'obtenir, si possible, une partie principale précise et compte tenu de la démonstration ci-dessus le plus vraisemblable serait l'équivalence suivante

$$\widehat{F_\infty}(-\nu) \sim \left[\int'_{V(0)\cap\mathscr{B}} dw_0\right] P^{n-rd}\,; \tag{4.14}$$

il s'agit d'un résultat nettement plus difficile que le lemme 4.6 pour lequel il faudrait commencer par donner un sens précis au coefficient de P^{n-rd} (à ce sujet voir le paragraphe 5.F). Birch, dans son travail, démontre cette équivalence en utilisant son hypothèse de codimension élevée de la variété des points singuliers de f. Cette hypothèse de géométrie algébrique entraîne les hypothèses (H1) et (H2) et c'est tout son mérite. Mais je ne sais pas si les seules hypothèses (H1), (H2) et (H4) suffisent pour obtenir l'équivalence (4.14).

Il ne reste plus qu'à conclure.

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) et avec les notations précédentes, il existe une boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$ *telle que, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$ *et pour tout* $P > P(\nu)$ *on ait l'inégalité*

$$\widehat{F^*}(-\nu) \gg P^{n-rd}\,.$$

Démonstration. Utiliser les lemmes 4.4 et 4.6. □

THÉORÈME PRINCIPAL. *Soit* $f = (f_1, ..., f_r)$, r *formes de degré* d *en* n *variables, à coefficients entiers et répondant aux hypothèses (H1), (H2), (H3) pour un élément* ν *de* $\mathbf{Z}^r$ *et (H4).*

Alors le système $f = \nu$ *admet une infinité de solutions entières.*

Démonstration. En raison du Théorème 4, la formule asymptotique de la Proposition 4.1 est effective lorsque $P \to +\infty$ avec $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$ d'où la conclusion. □

Remarque. Un corollaire évident du Théorème Principal est que le système homogène $f = 0$ admet au moins une solution non triviale, c'est-à-dire qu'*un système* f *obéissant aux hypothèses* (H1) *et* (H2) *observe le Principe de Hasse fin.*