Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: § 5. EXEMPLES D'APPLICATIONS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 5. Exemples d'applications

A) Sur les hypothèses (H1) et (H2)

La justification de l'hypothèse (H1) provient de l'emploi de l'inégalité de Weyl et de ses généralisations pour majorer des sommes trigonométriques du type $S(\alpha)$. Il semble que, *pour de telles sommes*, ce soit la seule méthode efficace actuellement connue. L'adjectif « efficace » étant un exemple d'euphémisme.

Le but de ce travail n'étant pas de recopier Birch ou Davenport, mieux valait se situer en aval, c'est-à-dire partir de l'hypothèse (H1), quitte à indiquer ici la méthode qui y conduit, sans démonstrations mais avec des références bibliographiques qui sont les suivantes:

Birch, « Forms in many variables », paragraphe 2, lemmes 2.1 à 2.5.

Davenport, « Cubic forms in 32 variables », paragraphes 3 et 4.
« Cubic forms in 16 variables », paragraphes 4 et 5.
« Analytic Methods... », paragraphes 3 et 13.

Pour le reste, il faut d'abord remarquer que la démonstration de l'inégalité de Weyl utilise une succession de différences finies (autant que le degré d des formes f_i) portant sur les polynômes présents dans l'exposant de e (les polynômes f_i et g en ce qui nous concerne) d'où un résultat *indépendant* du polynôme g puisque son degré est inférieur strictement à d. Ainsi la disparition du polynôme g dans l'hypothèse (H1), qui ne présente aucun inconvénient pour les paragraphes 1 à 4 du présent travail, n'a pas d'intérêt tant que la méthode de Weyl demeurera la seule qui puisse justifier l'hypothèse (H1).

L'inégalité de Weyl une fois obtenue, on utilise un résultat de géométrie des nombres (Birch lemme 2.3, Davenport « 32 variables » lemme (3.3) « 16 variables » lemme 8) avant d'aboutir à un *lemme à trois possibilités* (Birch lemme 2.5, Davenport « Analytic methods », lemme 32, Schmidt « Simultaneous rational zeros... », lemme 3).

La première possibilité est une bonne majoration du module de $S(\alpha)$ du type P^{n-k} où $k > 0$ est un paramètre.

La seconde possibilité est une bonne approximation rationnelle de α, précisément celle de l'hypothèse (H1) ii), associée à un second paramètre $\Delta > 0$.

La troisième possibilité est la mauvaise: celle qui ne garantit aucune des deux précédentes. Toutefois elle exprime une condition (compliquée) qui ne concerne pas α mais seulement les formes f_i.

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T, plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k=\Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ, plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1 .$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) Sur le travail de Birch

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ (on prend ici le corps $\mathbf{C}$ parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geqslant n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1}\, r(d-1)\Omega$$

qui implique l'hypothèse (H1). En ajoutant l'hypothèse (H2) on obtient donc la condition suffisante de Birch:

$$\text{codim } V^* > r(r+1)(d-1)2^{d-1}. \tag{5.1}$$

Un cas intéressant (Birch, paragraphe 7, Théorème 2) est $r = 1$, car alors l'égalité d'Euler pour les polynômes homogènes montre que V^* est l'ensemble des points singuliers de $V(0) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$ (c'est faux en général pour $r \geqslant 2$ où V^* est assez difficile à connaître). On obtient dans ce cas

$$\text{codim } V^* > (d-1)2^d. \tag{5.2}$$

Bien entendu la vérification des conditions (5.1) ou (5.2) dans des cas généraux est difficile. Birch ne propose d'ailleurs aucun exemple précis et ne s'attaque pas davantage aux hypothèses (H3) et (H4), l'avant-dernière étant inaccessible dans un cadre aussi général.

C) Sur les hypothèses (H3) et (H4)

Voici un contre-exemple simple qui permet de comprendre pourquoi l'hypothèse (H4) ne peut être à l'image de l'hypothèse (H3), à savoir

(H′4) Il existe un point non singulier de $V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$.

Considérons la forme $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, alors nous avons $r = 1$, $d = 2$ et $V^* = \{0\}$. Ainsi, d'après le travail de Birch et l'inégalité (5.2) ci-dessus, les hypothèses (H1) et (H2), sont vraies pour $n > 4$.

Soit $\nu \in \mathbf{N}^*$, d'après le Théorème de Lagrange, la variété réelle $V(\nu)$ admet des solutions entières pour $n \geqslant 4$. Ainsi le système $f = \nu$ possède des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout p, évidemment non singulières puisque $\nu \neq 0$ et l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Puisque l'hypothèse (H'_4) est clairement vraie, si elle était la bonne hypothèse à retenir, on obtiendrait une infinité de solutions entières pour tout $n > 4$, ce qui est faux puisque $V(\nu)$ est bornée dans $\mathbf{R}^n$.

D'ailleurs, la même impossibilité concerne toutes les variétés bornées de $\mathbf{R}^n$: il faut des points à l'infini réels pour espérer une infinité de solutions entières, c'est-à-dire un point réel non nul dans $V(0)$ et non dans $V(\nu)$.

Comme pour espérer des solutions entières il faut des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout p, on comprend mieux les hypothèses (H3) et (H4) tout en notant qu'elles demandent chacune l'existence de *points non singuliers* ce qui est plus exigeant que la simple nécessité.

D) Sur les travaux de Davenport

Il est le grand spécialiste de la méthode du cercle, il en vit toutes les subtilités ! et le travail de Birch généralise son « Cubic forms in 32 variables ».

Le but poursuivi est le

Théorème. Toute forme cubique ayant au moins N variables et à coefficients entiers représente zéro.

D'où trois articles de Davenport pour successivement $N = 32$, 29 et enfin 16.

Il faut d'abord remarquer qu'il s'agit d'une démonstration par l'absurde. En effet, la formule asymptotique que fournit la méthode du cercle est manifestement fausse pour beaucoup de formes (par exemple les formes dégénérées qui sont rationnellement équivalentes à des formes comprenant moins de variables: le terme principal est en P^{n-d} avec n, nombre de variables!). Il convient donc de les exclure ce qui peut se faire pour $d = 3$ (cette chance ne se poursuit pas pour $d > 3$) en supposant seulement que les formes étudiées ne représentent pas zéro.

S'il est possible d'appliquer la méthode du cercle, on obtiendra une évidente contradiction (une infinité de solutions entières pour des formes qui ne représentent pas zéro!) et donc le théorème recherché.

L'hypothèse (H4) ne coûte pas cher justement parce que la forme cubique $C(x)$ ne représente pas zéro (Davenport « 32 variables », lemme 6.1).

L'hypothèse (H3) est connue de Davenport qui rappelle, dans le paragraphe 2 de son « 32 variables », sa démonstration de l'existence pour toute forme cubique ayant au moins 10 variables, d'une solution non singulière dans $\mathbf{Q}_p$, pour tout p. (Ce résultat a été cité au paragraphe A de l'Introduction).

Toute l'habileté réside donc dans la définition d'une bonne propriété T qui entraîne les hypothèses (H1) et (H2).

Dans « 32 variables », au lemme 4.2, Davenport propose, pour une forme cubique $C(x)$ à coefficients entiers, la propriété T_1 suivante:

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $a_0u_0^3 + C_1(u_1, ..., u_m)$, en $(m+1)$ variables $u_0, u_1, ..., u_m$, où m est le plus petit entier supérieur ou égal à $n - 4\Omega$ (rappel: $\Omega = \frac{k}{\Delta}$) ».

C'est loin d'être beau, mais cela fonctionne, après de nombreux efforts que Davenport améliore dans son « 29 variables » sans toutefois modifier la propriété T_1.

Enfin dans l'article « 16 variables », Davenport propose, au lemme 13, la propriété T_2:

« Ne pas représenter zéro et ne pas être équivalente (par $GL_n(\mathbf{Q})$) à une forme du type $C_1(u_1, ..., u_{n-r}) + C_2(v_1, ..., v_r)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n-1$ ».

Non seulement T_2 est plus simple que T_1 mais la démonstration associée simplifie nettement les précédentes. Enfin si C est rationnellement équivalente à $C_1(u_1, ..., u_{n-r}) + C_2(v_1, ..., v_r)$, les sommes $S(\alpha)$ construites sur C sont le produit des mêmes sommes construites sur C_1 et C_2 et on obtient un raisonnement rapide par itération qui conduit au pire sur les formes diagonales connues depuis longtemps: un bien joli travail de précision!

Malheureusement aucune généralisation pour $d \geqslant 4$ ne paraît possible (dixit Davenport).

Enfin Davenport fait remarquer que pour démontrer le cas $N = 17$, sa démonstration est encore plus simple et qu'il suffit de la propriété T_3:

« Ne pas représenter zéro »

(cf. Davenport, « Analytic Methods... », Lemme 36).

E) Sur les travaux de W. M. Schmidt

Dans son article « Simultaneous rational zeros of quadratic forms », W. M. Schmidt considère le système $f = 0$ pour r formes quadratiques à coefficients entiers.

Soit $\mathbf{Q}(f) = \{\mu_1 f_1 + ... + \mu_r f_r \mid (\mu_1, ..., \mu_r) \in \mathbf{Q}^r - \{0\}\}$ le pinceau rationnel engendré par f.

Soit $\mathbf{C}(f) = \{\mu_1 f_1 + ... + \mu_r f_r \mid (\mu_1, ..., \mu_r) \in \mathbf{C}^r - \{0\}\}$ le pinceau complexe engendré par f.

Dans son lemme 6, pour obtenir les hypothèses (H1) et (H2), Schmidt propose la propriété T_1:

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a rang $g > 2r^2 + 3r$ ».

Il consacre à l'hypothèse (H3) son paragraphe 5 où il utilise les théorèmes 2 et 6 de son article « Simultaneous p-adic zeros of quadratic forms ». Il parvient ainsi à la propriété T_2:

« Pour tout $g \in \mathbf{Q}(f)$, on a rang $g > 4r^3 + r^2$ »

qui implique donc les hypothèses (H3), (H2) et (H1).

Enfin il montre que la propriété T_3:

« Pour tout $g \in \mathbf{C}(f)$, on a rang $g > 4r^2 + 4r$ »

implique la propriété T_2. Il en déduit son principal résultat:

$\{(\mathrm{H}_4) \text{ et } T_3\} \Rightarrow \{\text{le système } f \text{ représente zéro}\}$.

F) Sur la série singulière F

Dans le présent travail, la priorité est revenue à F^*, selon la notation d'Igusa. Mais, chez Igusa (Forms of higher degree) ou chez Lachaud (chapitre 1), la préférence est donnée à la fonction

$$F(\nu) = \widehat{F^*}(-\nu),$$

appelée série singulière globale et qui peut être définie directement.

Remarquons que si F est intégrable et continue alors on a $F^* = \hat{F}$, d'après la formule d'inversion de Fourier.

Les considérations du lemme 4.5 i) et ii) sont valables dans $\mathbf{Q}_p$ puisque le théorème des fonctions implicites est vrai pour des fonctions analytiques sur tout corps valué complet.

Ainsi obtient-on localement, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}$ et dans chaque $\mathbf{Q}_p$, la définition d'une mesure $dw_{\infty,\mu}$ ou $dw_{p,\mu}$, sur l'ouvert des points non singuliers de $V_\infty(\mu)$ ou $V_p(\mu)$ (dont les définitions sont évidentes!), telle que pour toute fonction φ à support compact inclus dans l'ouvert des points non singuliers du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$, on ait les formules de désintégration de mesures suivantes:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int \varphi dw_{\infty,\mu}\right] d\mu$$

et

$$\int_{\mathbf{Q}^n} \varphi(y)dy = \int_{\mathbf{Q}_p^r} \left[\int \varphi dw_{p,\mu}\right] d\mu .$$

Soit maintenant φ, une fonction de Schwarz Bruhat sur $\mathbf{A}^n$, décomposable et telle que φ_∞ et chaque φ_p aient un support compact inclus respectivement dans l'ouvert des points non singuliers de f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$; on définit les séries singulières locales

$$F_\infty(\mu_\infty) = \int \varphi_\infty \, dw_{\infty,\mu_\infty} \quad \text{et} \quad F_p(\mu_p) = \int \varphi_p \, dw_{p,\mu_p} .$$

Enfin, si le produit infini ci-dessous converge, on obtient la série singulière globale:

$$F(\mu) = F_\infty(\mu_\infty) \prod_p F_p(\mu_p) .$$

Revenons à une fonction φ locale (i.e: définie sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{Q}_p^n$). Si φ est à support compact quelconque celui-ci peut contenir des points singuliers

du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$ selon le cas. La définition de l'intégrale « $\int \varphi dw_\mu$ » pose alors un problème de convergence (Birch parle d'intégrale de Riemann généralisée) et *a fortiori* si φ n'est pas à support compact (ce dernier cas concerne seulement $\mathbf{R}$ et φ fonction de Schwartz). Enfin, même en cas de convergence, la continuité de la fonction locale F_∞ ou F_p reste à prouver.

Igusa (« Forms of higher degree », p. 76 à 79) montre que la fonction F_∞ existe et est continue pour $\mu \in \mathbf{R}^*$, dans le cas d'une forme f quelconque ($r=1$). Le cas $\mu = 0$ demande des hypothèses complémentaires sur f.

Birch montre (essentiellement, ceci a déjà été dit dans la remarque qui suit le lemme 4.6, grâce à l'inégalité (5.1) qui dit que codim V^* est grande) dans son lemme 6.1 surtout, que la fonction F_∞ existe et est continue pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$ lorsque la fonction φ_∞ est $1_{P\mathscr{B}}$ (le résultat serait identique pour $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$).

Il reste à s'assurer de la convergence du produit infini $\prod_p F_p$ (mais sous les hypothèses de Birch c'est vrai) pour obtenir la série singulière globale.

Le cas le plus étudié (Igusa, Lachaud) est celui des formes ($r=1$) fortement non dégénérées (i.e: $V^* = \{0\}$) où de très beaux résultats ont été obtenus par Igusa selon des méthodes qui n'ont rien à voir avec la méthode du cercle. Mais il paraît difficile de terminer ce travail sans avoir signalé l'existence, sous les hypothèses de Birch (i.e: l'inégalité (5.1)), d'une série singulière globale F continue et intégrable (donc on a $F^* = \hat{F}$).

Enfin, on peut raisonnablement prévoir, en suivant encore Igusa, une formule de Poisson globale:

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Q}^r} F^*(\xi) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}^r} F(\mu) .$$

BIBLIOGRAPHIE

BIRCH, B. J. Forms in many variables. *Proc. Royal Soc. A, 265* (1962), 245-263.

DAVENPORT, H. *Analytic Methods for diophantine equations and diophantine inequalities.* Ann. Arbor, 1962.

—— Cubic forms in 32 variables. *Phil. Trans. Royal Soc. A 251* (1959), 193-232.

—— Cubic forms in 16 variables. *Proc. Royal Soc. A, 272* (1963), 285-303.

GODEMENT, R. *Adèles et idèles.* Cours I.H.P. Paris, 1965/1966.