Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: B) SUR LE TRAVAIL DE BIRCH

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ainsi, chez tous les auteurs la règle est-elle la même: attribuer aux formes f_i une propriété T, plus ou moins laide, qui soit suffisante pour exclure la troisième possibilité et donc garantir l'hypothèse (H1) qui n'est autre que l'union des deux premières possibilités (poser $k=\Delta\Omega$)!

Mais ce n'est pas suffisant car pour exploiter convenablement, par la méthode du cercle de Hardy et Littlewood, l'hypothèse (H1) il faut disposer d'un bon accord entre les paramètres k et Δ, plus précisément de l'hypothèse (H2):

$$\frac{k}{\Delta} = \Omega > r + 1 .$$

Ainsi équipé le système f peut affronter la « machinerie » de la méthode du cercle dont le présent travail donne un exposé adélique. On obtient ainsi la formule asymptotique de la Proposition 4.1 (Birch lemme 5.5, Davenport « 16 variables » lemme 16, etc.).

Encore doit-on s'assurer que le terme principal de cette formule asymptotique n'est pas nul. C'est la raison des hypothèses (H3) et (H4). Hélas la vérification de (H3) est un problème difficile et tout simplement non résolu dès qu'on quitte les cas particuliers.

En résumé, pour obtenir des exemples d'application, il faut atteindre deux objectifs:

1° Trouver une propriété T du système f qui implique (H1) et aussi (H2).

2° Vérifier (H3) et éventuellement (H4).

B) Sur le travail de Birch

Ce dernier consacre son paragraphe 3 à la définition d'une propriété T en termes de géométrie algébrique.

Soit l'application polynomiale $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^r$ (on prend ici le corps $\mathbf{C}$ parce qu'il est algébriquement clos). Birch note

$$V^* = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{rang}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) < r\}$$

la variété des points singuliers de f (rappel: $r \geqslant n$).

Il obtient ainsi la propriété T suivante:

$$n - \dim V^* > 2^{d-1}\, r(d-1)\Omega$$

qui implique l'hypothèse (H1). En ajoutant l'hypothèse (H2) on obtient donc la condition suffisante de Birch:

$$\text{codim } V^* > r(r+1)(d-1)2^{d-1}. \tag{5.1}$$

Un cas intéressant (Birch, paragraphe 7, Théorème 2) est $r = 1$, car alors l'égalité d'Euler pour les polynômes homogènes montre que V^* est l'ensemble des points singuliers de $V(0) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$ (c'est faux en général pour $r \geqslant 2$ où V^* est assez difficile à connaître). On obtient dans ce cas

$$\text{codim } V^* > (d-1)2^d. \tag{5.2}$$

Bien entendu la vérification des conditions (5.1) ou (5.2) dans des cas généraux est difficile. Birch ne propose d'ailleurs aucun exemple précis et ne s'attaque pas davantage aux hypothèses (H3) et (H4), l'avant-dernière étant inaccessible dans un cadre aussi général.

C) Sur les hypothèses (H3) et (H4)

Voici un contre-exemple simple qui permet de comprendre pourquoi l'hypothèse (H4) ne peut être à l'image de l'hypothèse (H3), à savoir

(H′4) Il existe un point non singulier de $V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$.

Considérons la forme $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, alors nous avons $r = 1$, $d = 2$ et $V^* = \{0\}$. Ainsi, d'après le travail de Birch et l'inégalité (5.2) ci-dessus, les hypothèses (H1) et (H2), sont vraies pour $n > 4$.

Soit $\nu \in \mathbf{N}^*$, d'après le Théorème de Lagrange, la variété réelle $V(\nu)$ admet des solutions entières pour $n \geqslant 4$. Ainsi le système $f = \nu$ possède des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout p, évidemment non singulières puisque $\nu \neq 0$ et l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Puisque l'hypothèse (H'_4) est clairement vraie, si elle était la bonne hypothèse à retenir, on obtiendrait une infinité de solutions entières pour tout $n > 4$, ce qui est faux puisque $V(\nu)$ est bornée dans $\mathbf{R}^n$.

D'ailleurs, la même impossibilité concerne toutes les variétés bornées de $\mathbf{R}^n$: il faut des points à l'infini réels pour espérer une infinité de solutions entières, c'est-à-dire un point réel non nul dans $V(0)$ et non dans $V(\nu)$.

Comme pour espérer des solutions entières il faut des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout p, on comprend mieux les hypothèses (H3) et (H4) tout en notant qu'elles demandent chacune l'existence de *points non singuliers* ce qui est plus exigeant que la simple nécessité.