C) Sur les hypothèses (H3) et (H4)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

qui implique l'hypothèse (H1). En ajoutant l'hypothèse (H2) on obtient donc la condition suffisante de Birch:

$$\text{codim } V^* > r(r+1)(d-1)2^{d-1}. \tag{5.1}$$

Un cas intéressant (Birch, paragraphe 7, Théorème 2) est $r = 1$, car alors l'égalité d'Euler pour les polynômes homogènes montre que V^* est l'ensemble des points singuliers de $V(0) = \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0\}$ (c'est faux en général pour $r \geqslant 2$ où V^* est assez difficile à connaître). On obtient dans ce cas

$$\text{codim } V^* > (d-1)2^d. \tag{5.2}$$

Bien entendu la vérification des conditions (5.1) ou (5.2) dans des cas généraux est difficile. Birch ne propose d'ailleurs aucun exemple précis et ne s'attaque pas davantage aux hypothèses (H3) et (H4), l'avant-dernière étant inaccessible dans un cadre aussi général.

C) Sur les hypothèses (H3) et (H4)

Voici un contre-exemple simple qui permet de comprendre pourquoi l'hypothèse (H4) ne peut être à l'image de l'hypothèse (H3), à savoir

(H′4) Il existe un point non singulier de $V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$.

Considérons la forme $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, alors nous avons $r = 1$, $d = 2$ et $V^* = \{0\}$. Ainsi, d'après le travail de Birch et l'inégalité (5.2) ci-dessus, les hypothèses (H1) et (H2), sont vraies pour $n > 4$.

Soit $\nu \in \mathbf{N}^*$, d'après le Théorème de Lagrange, la variété réelle $V(\nu)$ admet des solutions entières pour $n \geqslant 4$. Ainsi le système $f = \nu$ possède des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout p, évidemment non singulières puisque $\nu \neq 0$ et l'hypothèse (H3) est vérifiée.

Puisque l'hypothèse (H'_4) est clairement vraie, si elle était la bonne hypothèse à retenir, on obtiendrait une infinité de solutions entières pour tout $n > 4$, ce qui est faux puisque $V(\nu)$ est bornée dans $\mathbf{R}^n$.

D'ailleurs, la même impossibilité concerne toutes les variétés bornées de $\mathbf{R}^n$: il faut des points à l'infini réels pour espérer une infinité de solutions entières, c'est-à-dire un point réel non nul dans $V(0)$ et non dans $V(\nu)$.

Comme pour espérer des solutions entières il faut des solutions dans $\mathbf{Z}_p^n$ pour tout p, on comprend mieux les hypothèses (H3) et (H4) tout en notant qu'elles demandent chacune l'existence de *points non singuliers* ce qui est plus exigeant que la simple nécessité.