F) Sur la série singulière F

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

F) Sur la série singulière F

Dans le présent travail, la priorité est revenue à F^*, selon la notation d'Igusa. Mais, chez Igusa (Forms of higher degree) ou chez Lachaud (chapitre 1), la préférence est donnée à la fonction

$$F(\nu) = \widehat{F^*}(-\nu),$$

appelée série singulière globale et qui peut être définie directement.

Remarquons que si F est intégrable et continue alors on a $F^* = \hat{F}$, d'après la formule d'inversion de Fourier.

Les considérations du lemme 4.5 i) et ii) sont valables dans $\mathbf{Q}_p$ puisque le théorème des fonctions implicites est vrai pour des fonctions analytiques sur tout corps valué complet.

Ainsi obtient-on localement, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}$ et dans chaque $\mathbf{Q}_p$, la définition d'une mesure $dw_{\infty,\mu}$ ou $dw_{p,\mu}$, sur l'ouvert des points non singuliers de $V_\infty(\mu)$ ou $V_p(\mu)$ (dont les définitions sont évidentes!), telle que pour toute fonction φ à support compact inclus dans l'ouvert des points non singuliers du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$, on ait les formules de désintégration de mesures suivantes:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^r} \left[\int \varphi dw_{\infty,\mu}\right] d\mu$$

et

$$\int_{\mathbf{Q}^n} \varphi(y)dy = \int_{\mathbf{Q}_p^r} \left[\int \varphi dw_{p,\mu}\right] d\mu .$$

Soit maintenant φ, une fonction de Schwarz Bruhat sur $\mathbf{A}^n$, décomposable et telle que φ_∞ et chaque φ_p aient un support compact inclus respectivement dans l'ouvert des points non singuliers de f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$; on définit les séries singulières locales

$$F_\infty(\mu_\infty) = \int \varphi_\infty \, dw_{\infty,\mu_\infty} \quad \text{et} \quad F_p(\mu_p) = \int \varphi_p \, dw_{p,\mu_p} .$$

Enfin, si le produit infini ci-dessous converge, on obtient la série singulière globale:

$$F(\mu) = F_\infty(\mu_\infty) \prod_p F_p(\mu_p) .$$

Revenons à une fonction φ locale (i.e: définie sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{Q}_p^n$). Si φ est à support compact quelconque celui-ci peut contenir des points singuliers

du système f dans $\mathbf{R}^n$ ou dans $\mathbf{Q}_p^n$ selon le cas. La définition de l'intégrale « $\int \varphi dw_\mu$ » pose alors un problème de convergence (Birch parle d'intégrale de Riemann généralisée) et *a fortiori* si φ n'est pas à support compact (ce dernier cas concerne seulement $\mathbf{R}$ et φ fonction de Schwartz). Enfin, même en cas de convergence, la continuité de la fonction locale F_∞ ou F_p reste à prouver.

Igusa (« Forms of higher degree », p. 76 à 79) montre que la fonction F_∞ existe et est continue pour $\mu \in \mathbf{R}^*$, dans le cas d'une forme f quelconque ($r=1$). Le cas $\mu = 0$ demande des hypothèses complémentaires sur f.

Birch montre (essentiellement, ceci a déjà été dit dans la remarque qui suit le lemme 4.6, grâce à l'inégalité (5.1) qui dit que codim V^* est grande) dans son lemme 6.1 surtout, que la fonction F_∞ existe et est continue pour tout $\mu \in \mathbf{R}^r$ lorsque la fonction φ_∞ est $1_{P\mathscr{B}}$ (le résultat serait identique pour $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$).

Il reste à s'assurer de la convergence du produit infini $\prod_p F_p$ (mais sous les hypothèses de Birch c'est vrai) pour obtenir la série singulière globale.

Le cas le plus étudié (Igusa, Lachaud) est celui des formes ($r=1$) fortement non dégénérées (i.e: $V^* = \{0\}$) où de très beaux résultats ont été obtenus par Igusa selon des méthodes qui n'ont rien à voir avec la méthode du cercle. Mais il paraît difficile de terminer ce travail sans avoir signalé l'existence, sous les hypothèses de Birch (i.e: l'inégalité (5.1)), d'une série singulière globale F continue et intégrable (donc on a $F^* = \hat{F}$).

Enfin, on peut raisonnablement prévoir, en suivant encore Igusa, une formule de Poisson globale:

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Q}^r} F^*(\xi) = \sum_{\mu \in \mathbf{Q}^r} F(\mu) .$$

BIBLIOGRAPHIE

BIRCH, B. J. Forms in many variables. *Proc. Royal Soc. A, 265* (1962), 245-263.

DAVENPORT, H. *Analytic Methods for diophantine equations and diophantine inequalities.* Ann. Arbor, 1962.

—— Cubic forms in 32 variables. *Phil. Trans. Royal Soc. A 251* (1959), 193-232.

—— Cubic forms in 16 variables. *Proc. Royal Soc. A, 272* (1963), 285-303.

GODEMENT, R. *Adèles et idèles.* Cours I.H.P. Paris, 1965/1966.