2. Le théorème de caractérisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\begin{tikzcd}
H_i(X, M'') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{ik}(M'', N)"] \arrow[d, "\partial \times \mathrm{id}"'] & H_{i-k}(X; M'' \otimes N) \arrow[dr, "\partial"] & \\
H_{i-1}(X; M') \times H^k(X; N) \arrow[r, "\Phi_X^{(i-1)k}(M', N)"] & H_{i-k-1}(X; M' \otimes N) \arrow[r, "\upsilon_*"] & H_{i-k-1}(X; T)
\end{tikzcd}$$

Pour énoncer la propriété IV on utilise les identifications classiques:

$$H_0(X; M) = M \Big/ \{m - m\alpha \mid m \in M, \alpha \in \mathbf{Z}\pi\},$$

$$H^0(X; N) = \{n \in N \mid gn = n \quad \text{pour tout} \quad g \in \pi\} \subset N.$$

On vérifie que l'application $M \times H^0(X; N) \subset M \times N \to M \otimes N$ donnée par $(m, n) \to m \otimes n$ produit, par passage aux quotients, une application $H_0(X; M) \times H^0(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$ que l'on notera $(m, n) \mapsto m \overline{\otimes} n$.

Propriété IV: $\phi_X^{00}(M, N)(m, n) = m \overline{\otimes} n$.

2. Le théorème de caractérisation

(2.1) Théorème. *Soit*

$$\phi_X^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$ *et tout triple* (X, M, N), *où* X *est un CW-complexe connexe par arc,* M *un* $\pi_1(X)$*-module à droite et* N *un* $\pi_1(X)$*-module à gauche. Supposons que la famille* $\phi_X^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés I à IV. Alors* $\phi_X^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être lorsque* $i = k > 0$. *Cette dernière restriction est inutile lorsque* M *est sans* $\mathbf{Z}$*-torsion ou que* N *est un* $F\pi_1(X)$*-module pour un corps* F.

Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème (2.1). Un théorème de Kan-Thurston [KT] affirme que, pour tout

CW-complexe connexe par arc X, on peut trouver une application $f^X: TX \to X$ telle que:

a) $f^X_*: H_*(TX; P) \to H_*(X; P)$ est un isomorphisme pour tout $\pi_1(X)$-module P

b) $TX = K(\pi_1(TX), 1)$, i.e. TX est contractile.

Ce résultat permet de réduire la démonstration du théorème (2.1) au cas d'espace d'Eilenberg-McLane. Le cas général découlera du calcul suivant (avec les abréviations $\phi^{ik}_X = \phi^{ik}_X(M, N)$ et $f = f^X$):

$$\phi^{ik}_X(z, \alpha) = \phi^{ik}_X(f_*(y), \alpha) = f_*\phi^{ik}_{TX}(y, f^*(\alpha)) = f_*(y \cap f^*(\alpha)) = z \cap \alpha .$$

La propriété I ne sera plus utilisée, car nous allons démontrer la proposition suivante:

(2.2). PROPOSITION. *Soit* $X = K(\pi, 1)$. *Soit*

$$\phi^{ik}(M, N): H_i(X; M) \times H^k(X; N) \to H_{i-k}(X; M \otimes N)$$

une famille d'applications définies pour tout $i, k \geqslant 0$, *tout* π*-module à droite* M *et tout* π*-module à gauche* N. *Si* $\phi^{ik}(M, N)$ *satisfait aux propriétés II, III et IV, alors* $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, *sauf peut-être pour* $i = k > 0$. *Lorsque* M *est sans* **Z***-torsion ou que* N *est un* $F\pi$*-module pour un corps* F, *on a également* $\phi^{ii}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

Démonstration. Considérons les énoncés suivants:

$\mathscr{H}(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$, pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2).

$\mathscr{H}^t(i, k)$: $\phi^{ik}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ pour toute paire (M, N) de π-modules comme dans l'énoncé de (2.2), avec M sans **Z**-torsion ou N un $F\pi$-module.

L'hypothèse $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie: elle est équivalente à la propriété IV. On va démontrer tout d'abord les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Pour tout* $i \geqslant k \geqslant 0$ $\mathscr{H}^t(i, k)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i, k+1)$.

LEMME 2. $\mathscr{H}^t(i, 0)$ *entraîne* $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$.

Puisque $\mathscr{H}(0, 0)$ est vraie, les lemmes 1 et 2 impliquent que $\mathscr{H}^t(i, k)$ est vraie pour tout $i, k \geqslant 0$. On démontrera enfin le

LEMME 3. $\mathscr{H}^t(i, k)$ pour tout i, k, entraîne $\mathscr{H}(i, k)$ lorsque $i > k$, ce qui achèvera la démonstration de (2.2).

Démonstration du lemme 1. Soit (M, N) une paire de π-module comme dans l'énoncé $\mathscr{H}^t(i, k+1)$. Considérons une suite exacte de π-modules à gauche $0 \to N \to I \to Q \to 0$ avec I un π-module injectif. Comme M est sans $\mathbf{Z}$-torsion, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est aussi exacte et le diagramme de la propriété II se réduit à un diagramme commutatif carré:

$$\begin{tikzcd}
H_i(X; M) \times H^k(X; Q) \arrow[r, "\Phi^{ik}(M, Q)"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \delta"'] & H_{i-k}(X; M \otimes Q) \arrow[d, "\partial"] \\
H_i(X; M) \times H^{k+1}(X; N) \arrow[r, "\Phi^{i(k+1)}(M, N)"] & H_{i-k-1}(X; M \otimes N)
\end{tikzcd}$$

Comme I est injectif et $X = K(\pi, 1)$, on a $H^j(X; I) = 0$ pour $j > 0$ et donc $\delta: H^k(X; Q) \to H^{k+1}(X; N)$ est surjectif pour $k \geqslant 0$. On a donc, en utilisant $\mathscr{H}^t_{(i,\, k)}$:

$$\phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \alpha) = \phi^{i(k+1)}(M, N)(z, \delta(\beta)) =$$
$$= \partial(\phi^{ik}(M, Q)(z, \beta)) = \partial(z \cap \beta) = z \cap \alpha,$$

ce qui prouve $\mathscr{H}^t(i, k+1)$ lorsque M est sans $\mathbf{Z}$-torsion. Dans le cas où N est un $F\pi$-module, on procède de même: on prend une suite $0 \to N \to I \to Q \to 0$, avec I un $F\pi$-module injectif. Une telle suite étant $\mathbf{Z}$-scindée, la suite $0 \to M \otimes N \to M \otimes I \to M \otimes Q \to 0$ est encore exacte.

Démonstration du Lemme 2. Soit (M, N) une paire de module comme dans l'énoncé de (2.2). Considérons une suite exacte de π-modules à droite $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un π-module libre. On en déduit une suite exacte $0 \to T \to L \otimes N \to M \otimes N \to 0$ et une surjection $\nu: K \otimes N \twoheadrightarrow T$. Observons que K est sans $\mathbf{Z}$-torsion; on peut donc appliquer l'hypothèse $\mathscr{H}^t_{(i,\, 0)}$ à la paire (K, N). Ceci, combiné avec la propriété III permet le calcul suivant:

$$\partial(\phi^{(i+1)0}(M, N)(z, \alpha)) = (-1)^0 \nu_*(\phi^{i0}(K, N)(\partial z, \alpha)) = \nu_*(\partial z \cap \alpha) =$$
$$= \partial(z \cap \alpha).$$

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X; M \otimes N) \to \to H_i(X; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X; L \otimes N) \to H_{i+1}(X; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X; T),$$

d'où l'injectivité de ∂ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, N *un* π*-module à gauche et* L *un* π*-module libre. Alors* $H_j(X; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X}; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

Démonstration du lemme 3. Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i+1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient M un π-module à droite et N un π-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme K est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-