Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU CAP-PRODUIT À COEFFICIENTS LOCAUX

Autor: Hausmann, Jean-Claude / Zahnd, Antoine

Kapitel: 3. Remarques, applications

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54557

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour prouver $\mathscr{H}^t(i+1, 0)$, il suffit donc d'établir que

$$\partial : H_{i+1}(X; M \otimes N) \to \to H_i(X; T)$$

est injectif pour $i \geqslant 0$. On a la suite exacte:

$$H_{i+1}(X; L \otimes N) \to H_{i+1}(X; M \otimes N) \xrightarrow{\delta} H_i(X; T),$$

d'où l'injectivité de ∂ est conséquence du lemme suivant:

(2.3) LEMME. *Soit* $X = K(\pi, 1)$, N *un* π*-module à gauche et* L *un* π*-module libre. Alors* $H_j(X; L \otimes N) = 0$ *pour* $j > 0$.

Démonstration. Grâce à l'isomorphisme

$$H^j(X; (L_1 \oplus L_2) \otimes N) = H_j(X; L_1 \otimes N) \oplus H_j(X; L_2 \otimes N),$$

il suffit de démontrer (2.3) pour $L = \mathbf{Z}\pi$. Rappelons que

$$P \otimes_\pi Q = H_0(X; P \otimes Q)$$

(voir [Br, p. 55]). On a alors:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes_\pi C_j(\tilde{X}) &= H_0(X; (\mathbf{Z}\pi \otimes N) \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= H_0(X; \mathbf{Z}\pi \otimes (N \otimes C_j(\tilde{X}))) = \mathbf{Z}\pi \otimes_\pi (N \otimes C_j(\tilde{X})) = \\ &= N \otimes C_j(\tilde{X}).\end{aligned}$$

On en déduit que $H_j(X; \mathbf{Z}\pi \otimes N) = H_j(\tilde{X}; N) = 0$, la dernière égalité étant due au fait que $\tilde{X}$ est contractile.

Démonstration du lemme 3. Il suffit de démontrer que $\mathscr{H}^t(i, k)$ implique $\mathscr{H}(i+1, k)$ pour $i \geqslant k$. Soient M un π-module à droite et N un π-module à gauche. Choisissons une suite exacte $0 \to K \to L \to M \to 0$ avec L un $\mathbf{Z}\pi$-module libre. Comme K est sans $\mathbf{Z}$-torsion, l'hypothèse $\mathscr{H}^t(i, k)$ et le même raisonnement que pour la démonstration du lemme 2 montrent que $\phi^{(i+1)k}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$.

3. REMARQUES, APPLICATIONS

1) La preuve du théorème (2.1) utilise abondamment le fait que l'on a affaire à l'homologie et à la cohomologie à coefficients locaux. Notre méthode ne donne donc pas de caractérisation du cap-produit pour l'homo-

logie et la cohomologie à coefficients constants. De même, et curieusement, elle ne semble pas permettre de montrer que des propriétés analogues à I-IV puissent caractériser le cup-produit. Observons qu'une telle caractérisation du cup-produit existe pour la cohomologie des groupes finis (voir [Ws, § 4.2]).

2) Nous ignorons si les propriétés I à IV impliquent que

$\phi_X^{nn}(M, N)(z, \alpha) = z \cap \alpha$ sans les hypothèses restrictives sur M ou $N (n > 0)$. Observons que le cap-produit

$$H^n(X; M) \times H_n(X; N) \to H_0(X; M \otimes N)$$

est induite par l'application « évaluation »:

$$(M \otimes_\pi C_n(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}); N) \to M \otimes_\pi N$$
$$(m \otimes_\pi z, \alpha) \to m \otimes_\pi \alpha(z).$$

3) Supposons que la famille d'applications $\phi_X^{ik}(M, N)$ soit induite par une famille d'applications:

$$\varphi_X^{ik}(M, N): (M \otimes_\pi C_i(\tilde{X})) \times \mathrm{Hom}_\pi(C_k(\tilde{X}); N) \to (M \otimes N) \otimes_\pi C_{i-k}(\tilde{X})$$

telle que

$$\partial\varphi^{ik}(z, \alpha) = (-1)^k \varphi^{i-1,k}(\partial z, \alpha) + \varphi^{i,k+1}(z, \delta\alpha) \, (\varphi^{ik} = \varphi_X^{ik}(M, N)).$$

Alors, les conditions II et III du théorème (2.1) sont automatiquement vérifiées.

4) Une caractérisation axiomatique du cap-produit telle que celle présentée dans cet article peut être utile pour reconnaître cette opération exprimée dans d'autres théories homologiques (homologie simpliciale, cubique, etc.). Si $\Psi_*: \hat{H}_*(X; M) \xrightarrow{\simeq} H_*(X; M)$ et $\Psi^*: \hat{H}^*(X; N) \xrightarrow{\simeq} H^*(X; N)$ sont des isomorphismes de théories (co-)homologiques et si

$$\hat{\cap}: \hat{H}_i(X; M) \times \hat{H}^k(X; N) \to \hat{H}_{i-k}(X; M \otimes N)$$

est un cap-produit satisfaisant aux propriétés I à IV, alors $\Psi_*(z \hat{\cap} \alpha) = \Psi_*(z) \cap \Psi^*(\alpha)$ (avec les restrictions sur M du théorème (2.1)).