LA THÉORIE DE THÉODORE DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS

Autor(en): **Kahane, Jean-Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-54559

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 85-92

LA THÉORIE DE THÉODORE DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS

par Jean-Pierre KAHANE

Théodore a développé des preuves géométriques pour l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... jusqu'à $\sqrt{17}$ [1]). A titre d'exemple, voici de telles preuves géométriques pour $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

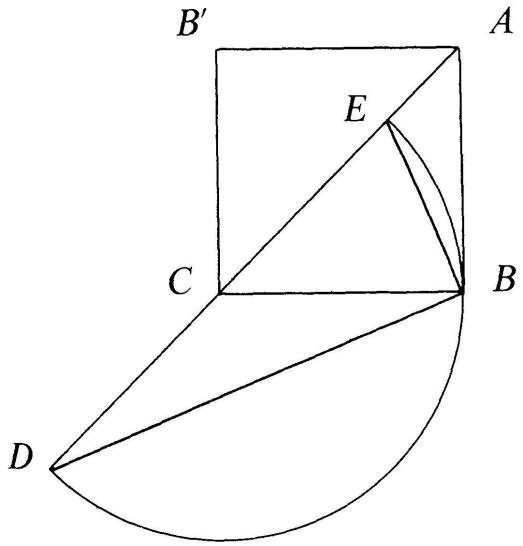

FIGURE 1

Sur la figure 1, $ABCB'$ est un carré, et $CD = CE = CB = AB$. Ainsi $AD = 2AB + AE$. Les triangles ABE et ADB sont semblables, donc $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AE}$. Donc l'algorithme des divisions successives, appliqué à AD et AB, ne se termine pas. Donc $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Sur la figure 2, ABB' est un triangle équilatéral, G est le milieu de BB', et

[1]) Platon, Théétète, 147 d.

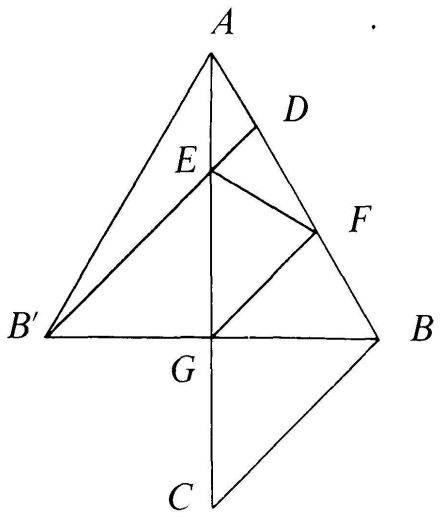

FIGURE 2

$$GE = GC = GB$$
$$CB \parallel GF \parallel B'ED\,.$$

Par symétrie par rapport à GF, $EF = BF$.

Par projection parallèle de $B'GB$, $DF = FB$.

$\widehat{EFA} = \widehat{2EBF}$ parce que le triangle EFB est isocèle, donc

$$\widehat{EFA} = \frac{\pi}{6} = \widehat{EAF}\,,$$

donc le triangle AEF est isocèle, donc $EF = AE$. Donc

$$AC = EC + AE = AB + AE$$
$$AB = 2AE + AD$$
$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{par homothétie}\,.$$

Donc l'algorithme des divisions successives, appliqué à AC et AB, ne se termine pas. Donc $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ est irrationnel.

La première preuve s'exprime ainsi, en posant $x = 1 + \sqrt{2} = \dfrac{AD}{AB}$:

$$x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}} = (2, 2, \dots)$$

où la parenthèse contient la suite des quotients incomplets de la décomposition de x en fraction continue. La seconde preuve, avec $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AC}{AB}$, nécessite deux étapes:

$$x = 1 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = 2 + \frac{1}{x},$$

soit
$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} = (1, 2, 1, 2, \dots).$$

Soit maintenant n un entier quadratfrei. Une preuve à la Théodore que $\sqrt{n}$ est irrationnel nécessite 1) le choix d'un nombre $x \in Q(\sqrt{n})$, corps de $\sqrt{n}$, 2) le développement de x en fraction continue, 3) une preuve géométrique que ce développement est périodique. Désignons par $Q_p(\sqrt{n})$ l'ensemble des $x \in Q(\sqrt{n})$, $x > 1$, dont le développement est purement périodique (sans partie apériodique), c'est-à-dire dont le conjugué est compris entre -1 et 0. On se limite à $x \in Q_p(\sqrt{n})$. Ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 = a_1 + \dfrac{1}{x_1} & (a_1 = E(x_0)) \\ x_1 = a_2 + \dfrac{1}{x_2} & (a_2 = E(x_1)) \\ \vdots & \\ x_{k-1} = a_k + \dfrac{1}{x_k} & (a_k = E(x_{k-1})) \\ x_k = x_0 = x & x_j \neq x \quad \text{si} \quad j < k \\ x = (a_1, a_2, \dots a_k; a_1, a_2, \dots a_k; \dots). & \end{cases}$$

La preuve géométrique consiste à construire une figure où apparaissent des segments $S_0, S_1, \dots S_k$ tels que $S_0 = xS_1$,

$$\begin{aligned} S_0 &= a_1 S_1 + S_2 \\ S_1 &= a_2 S_2 + S_3 \\ &\vdots \\ S_{k-1} &= a_k S_k + S_{k+1} \end{aligned}$$

et à montrer que
$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{S_0}{S_1}.$$

Cette dernière égalité résulte de la similitude de deux triangles, dont le rapport de similitude est

$$\rho = \rho(x) = \frac{S_0}{S_k}.$$

Nous appellerons $\rho(x)$ la *raison* de x. La complexité de la preuve dépend de k (le nombre d'étapes, que nous appellerons la *hauteur* de x), et sa faisabilité dépend de ρ; il est clair que pour $\rho > 50$ la figure souhaitée ne peut pas être tracée.

Dans son aspect algébrique, la théorie de Théodore consiste en ceci. 1) Etant donné n, déterminer le minimum de $\rho(x)$ quand $x \in Q_p(\sqrt{n})$, qu'on appellera la raison du corps $Q(\sqrt{n})$ et qu'on désignera par $r(n)$. 2) Parmi les $x \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(x) = r(n)$, déterminer x de hauteur minimum.

Etant donné $x \in Q_p(\sqrt{n})$, on a

$$\rho(x) = \frac{S_0}{S_1}\frac{S_1}{S_2}\cdots\frac{S_{k-1}}{S_k} = x_0x_1 \dots x_{k-1}.$$

Désormais, la suite des quotients complets $x_0 = x, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = x_0$, les quotients incomplets $a_1, \dots, a_k$ et la hauteur k sont définis par les formules (1), et la raison de x par la formule

$$\rho(x) = x_0x_1 \dots x_{k-1} = x_1x_2 \dots x_k. \tag{2}$$

Les formules (1) peuvent s'écrire

$$\begin{pmatrix} x_0x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} x_0x_1 \dots x_k \\ x_1 \dots x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\rho\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\rho = \rho(x)$. Donc

$$\rho = Qx + Q' \tag{3}$$

et ρ est la valeur propre supérieure à 1 de la matrice unimodulaire $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$. Soit N la trace, et $\varepsilon = \pm 1$ le déterminant de cette matrice. On a

$$\rho^2 - N\rho + \varepsilon = 0 \qquad (N = P + Q',\ \varepsilon = PQ' - P'Q) \tag{4}$$

$$\rho = \frac{N + \sqrt{N^2 - 4\varepsilon}}{2}$$

$$x = \frac{N - 2Q' + \sqrt{N^2 - 4\varepsilon}}{2Q}.$$

Si $\varepsilon = -1$ la formule (4) s'écrit

$$\rho = N + \frac{1}{\rho} = (N, N, \ldots).$$

Ainsi $\rho \in Q_p(\sqrt{n})$, et ρ a pour hauteur 1 et pour raison ρ. Parmi les nombres $y \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(y) = \rho$, le meilleur choix possible (le nombre de hauteur minimum) est $y = \rho$.

Si $\varepsilon = +1$ la formule (4) donne

$$\rho = N - 1 + \frac{\rho - 1}{\rho} = N - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\rho - 1}}$$

donc

$$\rho - 1 = (N-2, 1; N - 2, 1, \ldots).$$

Ainsi $\rho - 1 \in Q_p(\sqrt{n})$, et $\rho - 1$ a pour hauteur 2 et pour raison $\rho = (\rho - 1)\dfrac{\rho}{\rho - 1}$. Parmi les nombres $y \in Q_p(\sqrt{n})$ tels que $\rho(y) = \rho$, les meilleurs choix possibles (hauteur minimum) comprennent $y = \rho - 1$. De façon générale, ces meilleurs choix sont de la forme

$$y = (a, b; a, b; \ldots)$$

avec

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$$

où $P + Q' = N$, c'est-à-dire

$$ab + 2 = N$$

et alors, d'après (3),

$$y = \frac{\rho - 1}{b}.$$

Donc le nombre des meilleurs choix est le nombre de diviseurs de $N - 2$, et le plus grand des meilleurs choix est $\rho - 1$.

Dans les deux cas on a

$$N^2 - 4\varepsilon = k^2 n.$$

Le plus petit choix de ρ correspond au plus petit choix de N, c'est-à-dire à la solution minimale de l'équation en (N, k)

$$\text{(F)} \qquad N^2 - k^2 n = 4\varepsilon.$$

Quand N est pair, l'équation (F) s'appelle équation de Fermat, ou de Fermat-Pell.

Résumons. Si $Q_p(\sqrt{n})$ contient un nombre de hauteur impaire, il contient aussi un nombre ρ de hauteur un (à savoir la raison du précédent). L'équation (F) avec $\varepsilon = -1$ admet une solution

$$N = \rho - \frac{1}{\rho}.$$

La plus petite solution de (F) donne le minimum de ρ, c'est-à-dire la raison $r(n)$ du corps $Q_p(\sqrt{n})$. Il existe un x unique de hauteur minimum tel que $\rho(x) = r(n)$, à savoir $x = r(n)$.

Si $Q_p(\sqrt{n})$ contient seulement des nombres de hauteur paire, il contient des nombres ρ de hauteur deux (à savoir les raisons des précédents). L'équation (F) avec $\varepsilon = 1$ admet des solutions

$$N = \rho + \frac{1}{\rho}.$$

TABLEAU 1

n	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19
ε	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
min N	2	4	1	10	16	6	20	3	30	8	8	340
$r(n)$	$1+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$5+2\sqrt{6}$	$8+3\sqrt{7}$	$3+\sqrt{10}$	$10+3\sqrt{11}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$15+4\sqrt{14}$	$4+\sqrt{15}$	$4+\sqrt{17}$	$170+39\sqrt{19}$
	2,414	3,732	1,618	9,899	15,937	6,162	19,950	3,303	29,967	7,873	8,123	339,997

La plus petite solution de (F) donne le minimum de ρ, c'est-à-dire $r(n)$. Les nombres $x \in Q_p(\sqrt{n})$ de hauteur minimum tels que $\rho(x) = r(n)$ sont les quotients de $\rho - 1$ par les diviseurs de $N - 2$.

Dans les deux cas, les raisons $\rho(x)$ $(x \in Q_p(\sqrt{n})$ sont les unités du corps $Q(\sqrt{n})$. La théorie de Théodore est une façon simple d'obtenir leur existence et certaines de leurs propriétés, et aussi de démontrer l'existence de solutions de (F) quand $\varepsilon = 1$ (observer que si $\varepsilon = -1$ la hauteur de $r^2(n)$ est 2).

Le tableau 1 donne les valeurs de ε et de $r(n)$ pour les entiers quadratfrei n, compris entre 2 et 19. Il explique pourquoi Théodore s'était arrêté à $\sqrt{17}$. La figure 3 explicite une construction géométrique dans le cas $n = 7$, et montre comment on peut opérer en *une* étape, dans le cas $\varepsilon = 1$, en utilisant une variante de l'algorithme des divisions successives. Même avec cette simplification, la figure dans le cas $n = 14$ est peu lisible, et dans le cas $n = 19$ elle est impossible à tracer.

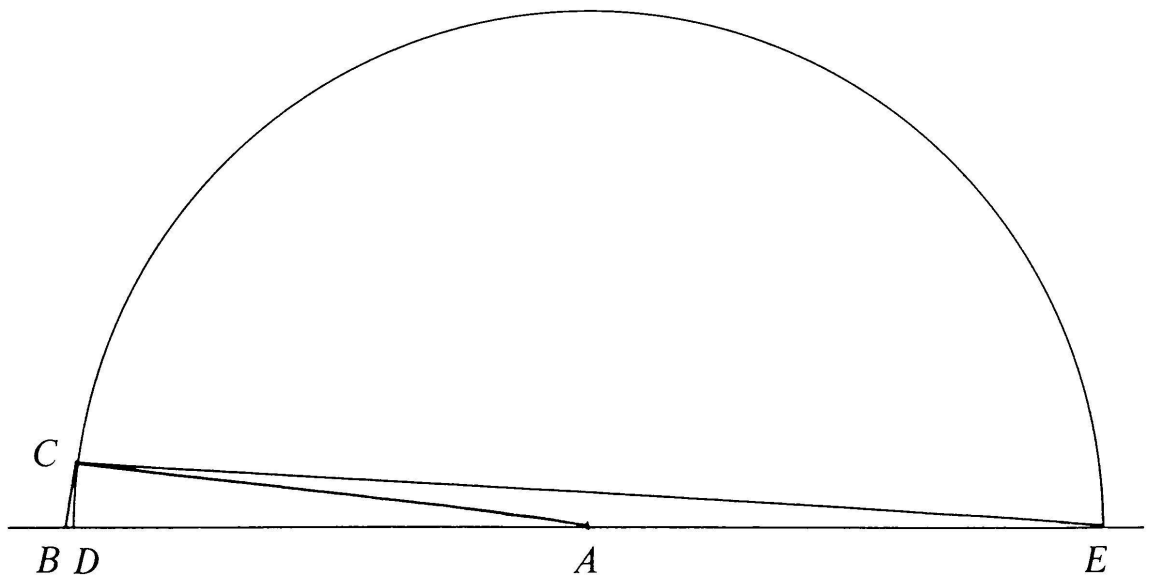

FIGURE 3

$$AB = 8BC\,, \quad \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}\,, \quad AD = AE = AC = 3\sqrt{7}\,BC$$

$$BE = (8+3\sqrt{7})\,BC = 16\,BC - BD\,, \quad \frac{BC}{BD} = \frac{BE}{BC}$$

Jean-Pierre Kahane
Université de Paris-Sud
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex (France)

(Reçu le 22 décembre 1983)