Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

Autor: Wielonsky, Franck

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54560

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 93-135

SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

par Franck WIELONSKY

INTRODUCTION

Soit E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$; alors d'après une formule de Hecke, on sait exprimer la fonction Zéta de E comme une somme finie d'intégrales de séries d'Epstein (cf. [He], [S] ou [T] pour une formulation précise).

L'objet de ce travail est de donner une version adélique et généralisée de cette formule en suivant une suggestion faite par Zagier (cf. [Z] pour le cas des extensions quadratiques (cf. aussi [Ha])). Celle-ci exprime une égalité entre la fonction Zéta d'une extension algébrique E de dimension finie n sur un corps global k et l'intégrale sur un tore d'une série d'Eisenstein.

Le chapitre I est consacré à l'étude de ce tore: le choix d'une base sur k de l'espace vectoriel $V(k)$ sous-jacent à E détermine un plongement π de E et plus généralement de $E \otimes_k K$, où K est une extension de k, dans une sous-algèbre $B(K)$ de $M_n(K)$ dont l'ensemble des éléments inversibles $T(K)$ forme un tore maximal dans $G(K)$. (On note pour simplifier G le groupe algébrique GL_n).

Dans le chapitre II, on établit d'autres résultats de nature algébrique qui sont utiles dans la suite.

Les séries d'Eisenstein adéliques sont étudiées dans les chapitres III et IV. (Pour les séries d'Eisenstein sur $SL_2(\mathbf{R})$, on peut trouver des démonstrations de la convergence et du prolongement analytique dans [L]). Soient x une matrice de $G(\mathbf{A}_k)$, φ une fonction dans l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, $e = (0, ..., 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de l'espace vectoriel V. ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$, σ l'unique réel tel que:

$$|\omega| = \omega_\sigma \quad \text{où} \quad \omega_\sigma(t) = |t|_{A_k}^\sigma, \quad t \in \mathbf{A}_k^\times$$

μ une mesure de Haar sur le groupe $\mathbf{A}_k^\times$.

On pose

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(etx)\omega(\det tx)d\mu(t) .$$

On montre d'abord la convergence de cette intégrale pour $\sigma > 1/n$. La série d'Eisenstein $E(\varphi, x, \omega)$ est alors définie par

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega) ,$$

où $P(k)$ est un sous-groupe parabolique de $G(k)$.

Nous montrons ensuite que cette série converge pour $\sigma > 1$ en utilisant une expression intégrale de celle-ci à savoir:

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \sum_{\xi \in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx)d\mu(t) .$$

On décompose alors cette intégrale en un produit d'intégrales locales correspondant à chaque place du corps global k.

La finitude du groupe C_k des classes d'idéaux de k en caractéristique 0, la finitude du groupe des classes de diviseurs de degré 0 et le théorème de Riemann-Roch pour le corps de fonctions k en caractéristique p interviennent également dans la preuve de la convergence de ces séries. On établit ensuite le prolongement analytique de ces séries à l'ensemble de tous les quasi-caractères et l'équation fonctionnelle qu'elles vérifient, déduite de la formule de Poisson pour les séries θ définies par:

$$\theta(\varphi, x, t) = \sum_{\xi \in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx) , \qquad t \in \mathbf{A}_k^\times .$$

On dispose alors des notions nécessaires pour démontrer la formule recherchée. C'est l'objet du chapitre V. Un énoncé précis de cette formule est le suivant: Soient Z le centre de G, $\mu_{Z\backslash T}$ une mesure de Haar sur le quotient $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$, $\zeta(\varphi, \omega)$ l'intégrale de Tate

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t)\omega(t)d\mu_E(t)$$

et

$$\varphi_g(t) = \varphi(tg) \quad \text{pour} \quad g \in G(\mathbf{A}_k) ;$$

on a

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)d\mu_{Z\backslash T}(t) = \omega(\det g) \cdot \zeta(\varphi_g, \omega \circ N_{E/k}) .$$

On termine ce travail en montrant comment on peut retrouver la formule classique de Hecke à partir de la formule adélique. Pour cela, on construit une projection du quotient $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans le quotient $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ en utilisant la décomposition bien connue du groupe $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^{+}(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Pour obtenir la formule classique, on calcule quelle est l'image par cette projection du domaine d'intégration $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ qui apparaît dans la formule généralisée. En particulier, cela fait intervenir des résultats obtenus dans le chapitre II.

Cet article reproduit une thèse de 3e cycle effectuée sous la direction de Gilles Lachaud. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

Chapitre I

Plongement d'un corps de nombres dans une algèbre de matrices rationnelles

Dans ce qui suit, k désigne un corps global ($\mathbf{A}$-field dans la terminologie de [6] p. 43) et E une algèbre étale sur k ([3] chap. V, p. 28, déf. 1).

Exemple. On prend pour k le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et pour E une extension de dimension finie de $\mathbf{Q}$; alors E est une extension séparable de $\mathbf{Q}$ et donc une algèbre étale ([3] chap. V, p. 35, déf. 1).

On note E_{vect} l'espace vectoriel sous-jacent à E; et on pose:

$$n = \dim E_{\text{vect}} = [E:k] .$$

Si $x \in E$, on note u_x l'endomorphisme k-linéaire de E_{vect} défini par

$$u_x(y) = xy \qquad (y \in E) ,$$

de telle sorte que

$$u_{x+y} = u_x + u_y \qquad u_{xy} = u_x \circ u_y , \qquad x, y \in E ;$$

autrement dit, l'application $u: E \to End(E_{\text{vect}})$ définie par $u: x \mapsto u_x$ est un homomorphisme de k-algèbres.

Soit $\omega = [\omega_1, ..., \omega_n]$ une base du k-espace vectoriel E_{vect}. Cette base définit un isomorphisme Ω de k^n sur E défini par

$$\Omega(x_1, ..., x_n) = x_1\omega_1 + ... + x_n\omega_n .$$

On pose, pour $x \in E$,

$$\pi(x) = \Omega^{-1}u_x\Omega ,$$

de telle sorte que

$$\pi : E \to M_n(k)$$

est un homomorphisme de k-algèbres. On pose

$$\pi(E) = B(k) ;$$

ainsi $B(k)$ est une sous-algèbre commutative et unifère de $M_n(k)$, de dimension n sur k. Comme sous-espace vectoriel de dimension n de $M_n(k)$, l'algèbre $B(k)$ est définie par $N = n(n-1)$ équations linéaires à coefficients dans k:

$$f_1(x) = 0, ..., f_N(x) = 0 ;$$

on notera F l'application linéaire de $M_n(k)$ dans k^N de coordonnées $f_1, ..., f_N$ de sorte que $B(k)$ est égal au noyau de F.

Pour toute extension K de k, on pose

$$B(K) = \{x \in M_n(K) \mid F(x) = 0\} ;$$

c'est une sous-algèbre de $M_n(K)$ qui admet $\pi(\omega) = [\pi(\omega_1), ..., \pi(\omega_n)]$ pour base. Pour $x \otimes \lambda \in E \otimes_k K$, on pose:

$$\pi(x \otimes \lambda) = \lambda\pi(x);$$

l'application π ainsi prolongée est K-linéaire et définit un isomorphisme de K-algèbres:

$$\pi : E \otimes_k K \to B(K)$$

(en effet, ici encore, π transforme une base de $E \otimes K$ en une base de $B(K)$). On pose

$$T(K) = B(K) \cap GL_n(K) ,$$

le groupe $T(K)$ est donc le groupe des éléments inversibles de $B(K)$; en effet si $x \in B(K)^*$ alors $x \in GL_n(K)$.

Réciproquement, si $x \in B(K)$ a un déterminant non nul, l'application $y \mapsto xy$ de $B(K)$ est K-linéaire et injective (puisque x a un inverse dans

$GL_n(K)$), donc surjective, et il existe donc $y \in B(K)$ tel que $xy = 1$. La définition de $T(K)$ montre que T est un sous-groupe algébrique commutatif de GL_n.

Prenons en particulier pour K une extension algébriquement close $\bar{k}$ de k; l'algèbre $B(\bar{k})$ est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur $\bar{k}$ à l'algèbre produit $\bar{k}^n$, par conséquent, le groupe $T(\bar{k})$ est isomorphe à $(\bar{k}*)^n$ ce qui démontre la

PROPOSITION 1. *Le groupe T est un tore maximal de $GL(n)$ défini sur k (et donc un sous-groupe de Cartan)* (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).

Remarque. Dans le cas où E est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, l'homomorphisme π donne bien un plongement de E dans une algèbre $B(\mathbf{Q})$ de matrices rationnelles.

Chapitre II

CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On suppose maintenant que k est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$ et que E est une extension de k.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose:

$$F_v = \prod_{w|v} E_w .$$

On note μ_w l'application

$$\Sigma\lambda_i \otimes \omega_i \to \Sigma\lambda_i\omega_i$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w (elle n'est pas injective), et si les places de E au-dessus de la place v de k sont les places $w_1, ..., w_s$, on note

$$\mu : E \otimes k_v \to F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_s(x)) .$$

C'est un isomorphisme de k_v-algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).

Soit ν le morphisme tel que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \otimes k_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(k_v) \arrow[d, "\nu"] \\ & F_v \end{tikzcd}$$

Soit r l'anneau des entiers de k et r_v l'adhérence de r dans k_v; on note en outre R l'anneau des entiers de E et R_w son adhérence dans E_w. (C'est le sous-anneau compact maximal de E_w (cf. [6], Cor. 1, p. 83)).

Enfin, on pose

$$D_v = \prod_{w|v} R_w ;$$

c'est le sous-anneau compact maximal de l'algèbre F_v.

Remarquons que $R \otimes r_v$ est le sous-anneau compact maximal de $E \otimes k_v$. En effet, puisque R est de type fini sur r, l'anneau $R \otimes r_v$ est compact, et son image par μ_i est dense dans R_{w_i} (car R est dense dans R_{w_i}), donc lui est égale; on obtient $\mu(R \otimes r_v) = D_v$. C.Q.F.D.

Posons $\pi(R \otimes r_v) = C_v$;

on a donc un diagramme d'isomorphismes de r_v-algèbres et de sous-anneaux compacts maximaux:

$$\begin{tikzcd} R \otimes r_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & C_v \arrow[d, "\nu"] \\ & D_v \end{tikzcd}$$

On pose enfin

$$B(r_v) = B(k_v) \cap M_n(r_v) ,$$

$$G_v = \Sigma \omega_i r_v \subset E \otimes k_v ;$$

G_v est un sous r_v-module de $E \otimes k_v$, et $B(r_v)$ est un sous-anneau de C_v, car $B(r_v)$ est compact.

Remarque. On a $\pi(G_v) \subset B(r_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; autrement dit si les coefficients de la table de multiplication

$$\omega_h \omega_j = \Sigma a_{ij}^h \omega_i$$

sont dans r_v; en effet, on a

$$\pi(\omega_h) = (a_{ij}^h)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} .$$

D'autre part, notons ω^* la base duale de ω (cf. [1], p. 451); on a $B(r_v) \subset \pi(G_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i^*) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Il s'ensuit que G_v est un sous-anneau compact de $E \otimes k_v$ dès que $\pi(G_v) \subset B(r_v)$. On a alors les résultats suivants:

PROPOSITION 2. 1) *Pour presque toute place* v, *on a*

$$\pi(G_v) = B(r_v) .$$

2) *Pour presque toute place* v, *on a*

$$G_v = R \otimes r_v .$$

Démonstration. Pour 1) on utilise la remarque ci-dessus. Pour 2) on voit que $\mu(G_v) = D_v$ en utilisant [6] Th. 4, p. 57. On a donc presque toujours le diagramme d'isomorphismes

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G_v = R \otimes r_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(r_v) = C_v \arrow[d, "v"] \\ & D_v \end{tikzcd}$$

Remarque. Supposons l'anneau r principal, alors le r-module R admet une base. En effet, un module sans torsion de type fini sur un anneau principal est un module libre de rang fini (cf. [3], ch. VII, p. 19, Cor. 2).

Si ω est une telle base, c'est évidemment une base de E sur k. La table de multiplication de cette base est alors à coefficients dans r, on a donc:

$$\pi(R) \subset B(r) = B(k) \cap M_n(r)$$

et par conséquent

$$C_v = \pi(R \otimes r_v) \subset B(r_v) ,$$

donc $C_v = B(r_v)$; d'autre part

$$R \otimes r_v = \Sigma \omega_i r_v = G_v .$$

Il s'ensuit donc que lorsque l'anneau r est principal, et que l'on prend pour ω une base de R sur r, on a à chaque place v sans exception le diagramme (*).

Ecrivons $\nu(B(r_v)) = \prod_{w|v} O_w$; alors O_w est un sous-anneau de R_w. Soit S l'ensemble des places de k telles que $B(r_v) \neq C_v$. On a $O_w = R_w$ dès que w ne divise aucune place de S. Posons:

$$O = \bigcap_w (O_w \cap E) ;$$

alors O est un ordre de E et O est dense dans O_w.
On pose

$$T(r_v) = B(r_v)^\times = \{x \in B(r_v) \mid \det x \in r_v^\times \}$$

Le groupe $T(r_v)$ est un sous-groupe compact de $T(k_v)$; il est maximal dès que $v \notin S$; on a un isomorphisme

$$T(r_v) \xrightarrow{\nu} \prod_{w|v} O_w^\times .$$

Posons

$$T(\hat{r}) = \prod_v T(r_v) \quad \text{et} \quad \hat{O}^\times = \prod_w O_w^\times ;$$

Notons $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_E$) l'anneau des adèles de k (resp. de E) et $T(\mathbf{A})$ le groupe des points de T à valeurs dans $\mathbf{A}$. Avec ces notations, le résultat suivant est immédiat:

PROPOSITION 3. *L'application* ν *induit un isomorphisme*

$$T(k)\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{r}) \to E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / \hat{O}^\times .$$

Si $S = \emptyset$, par exemple dans le cas où ω est une base de R sur r on a $O_w = R_w$ et

$$\hat{O}^\times = \prod_w R_w^\times .$$

En définitive, on obtient le résultat suivant.

Supposons $G_v = R \otimes r_v$ pour tout v. Cette condition est vérifiée si ω est une base de R sur r, ce qui est toujours possible si r est principal.
Si X est une partie de k, notons $[X]_v$ son adhérence dans k_v.

Pour $x \in T(\mathbf{A})$, soit $I_T(x)$ le réseau de k^n tel que

$$[I_T(x)]_v = r_v^n x_v \qquad \text{pour toute place } v \text{ finie}.$$

Pour $c \in \mathbf{A}_E^\times$, soit $I_E(c)$ l'idéal fractionnaire de E tel que

$$[I_E(c)]_w = c_w R_w \qquad \text{pour toute place } w \text{ finie}.$$

Enfin, pour tout idéal fractionnaire I de E on note $\Omega^{-1}(I)$ son image par l'isomorphisme Ω^{-1}.

PROPOSITION 4. *Avec les notations précédentes, si* ω *est une base de* R *sur* r, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_E^\times \arrow[r, "\nu^{-1}"] \arrow[d, "I_E"'] & T(\mathbf{A}) \arrow[d, "I_T"] \\
\text{Idéaux de } E \arrow[r, "\Omega^{-1}"] & \text{Réseaux de } k^n
\end{tikzcd}$$

Démonstration. 1°) Soit $z_v \in (E \otimes k_v)^\times$. On a

$$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v}(G_v)$$

et puisque $G_v = \Omega(r_v^n)$, il vient $\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v} \circ \Omega(r_v^n)$ et donc

$$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = r_v^n \cdot \pi(z_v). \tag{1}$$

2°) Soit $(c_w)_{w|v} \in \prod_{w|v} E_w^\times$. Si $G_v = R \otimes r_v$, on a $\mu^{-1}(\Pi R_w) = G_v$ et donc

$$\mu^{-1}((c_w)_{w|v}) \cdot G_v = \mu^{-1}(\Pi c_w \cdot R_w). \tag{2}$$

3°) Soit $c \in \mathbf{A}_E^\times$. On a

$$\mu([I_E(c)]_v) = \Pi c_w R_w.$$

D'autre part la relation (2) implique $\Pi c_w R_w = \mu(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v)$; on a donc

$$[I_E(c)]_v = \mu^{-1}(c)_v \cdot G_v.$$

Par la relation (1), il vient

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1} I_E(c)]_v &= \Omega^{-1}([I_E(c)]_v) = \Omega^{-1}(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v) \\
&= r_v^n \cdot \pi \circ \mu^{-1}(c)_v = r_v^n \cdot \nu^{-1}(c)_v
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(\nu^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

Chapitre III

Définition et convergence des séries d'Eisenstein

Dans tout ce chapitre, k désignera un corps global et $\mathbf{A}_k$ les adèles de k.

1. Mesures sur $\mathbf{A}_k$ et $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de k (dans le cas où l'extension k est un corps de nombres). Sur le corps $\mathbf{R}$, on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée dx et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$, on choisit la mesure de Haar $\dfrac{dx}{|x|}$. Sur le corps $\mathbf{C}$, on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx\,dy$$

et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$, on prend comme mesure la mesure de Haar:

$$|z|^{-2}\,|dz \wedge d\bar{z}|\,.$$

Pour chaque place finie v de k, on note α_v une mesure de Haar sur k_v complété de k en cette place. Soit r_v le sous-anneau compact maximal de k_v on suppose que pour presque tout v, le réel positif $m_v = \alpha_v(r_v)$ est égal à 1 Alors sur le corps global $\mathbf{A}_k$, il existe une unique mesure notée α qui coïncide avec la mesure produit $\Pi\alpha_v$ sur chacun des sous-groupes ouverts $\prod_{v\in P} k_v \cdot \prod_{v\notin P} r_v$ de $\mathbf{A}_k$ où P est un ensemble fini de places de k contenant au moins les places infinies. Alors α est une mesure de Haar sur le corps $\mathbf{A}_k$ Sur le groupe multiplicatif $k_v^\times$, on sait que la mesure $\dfrac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$ est une mesure de Haar. ($|x|_v$ désignant le module de $x \in k_v$).

Soit π_v une uniformisante de k_v; on choisira comme mesure de Haar sur $k_v^\times$, la mesure $d\mu_v$ définie par

$$d\mu_v(x) = \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \cdot \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v},$$

de sorte que l'on a le:

LEMME. *Pour toute place finie* v,

$$\int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) = m_v .$$

Démonstration.

$$m_v = \int_{x \in r_v} d\alpha_v(x) = \int_{|x|_v \leq 1} d\alpha_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|x|_v = |\pi_v|_v^{+n}} d\alpha_v(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_v|^{-n} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x) = \left(1 - \frac{1}{|\pi_v|_v}\right)^{-1} \int_{|x|_v=1} d\alpha_v(x)$$

$$= \frac{|\pi_v|_v}{|\pi_v|_v - 1} \int_{|x|_v=1} \frac{d\alpha_v(x)}{|x|_v} = \int_{|x|_v=1} d\mu_v(x) .$$

Alors on définit la mesure de Haar μ sur $\mathbf{A}_k^\times$ comme l'unique mesure coïncidant avec la mesure produit $\prod_v \mu_v$ sur chacun des sous-groupes $\prod_{v \in P} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P} r_v^\times$.

2. SÉRIES D'EISENSTEIN

Dans la suite, G désignera le groupe algébrique GL_n; V un espace vectoriel de dimension n, $e = (0, ..., 0, 1)$ le dernier élément de la base canonique de V et $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat définies sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ de la manière suivante:

On dira d'abord qu'une fonction f à valeurs complexes définie sur le vectoriel $V(\mathbf{A}_k)$ est décomposable si elle s'écrit comme un produit

$$f(x) = \prod_v f_v(x_v) .$$

Pour les places infinies éventuelles, on demande que f_v soit dans $\mathscr{S}(V(k_v))$ l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes à décroissance rapide, i.e. quel que soit $\alpha \in \mathbf{N}^{an}$ (avec $a = 1$ si $k_v = \mathbf{R}$ et $a = 2$ si $k_v = \mathbf{C}$) et quel

que soit $N > 1$ il existe $C > 0$ tel que

$$| \partial^\alpha f_v(t_v) | \leqslant C(1 + \|t_v\|)^{-N}$$

quel que soit $t_v \in k_v$.
Pour les places finies v, on demande que f_v soit dans l'espace des fonctions à valeurs complexes localement constantes et à support compact. On notera également cet espace $\mathscr{S}(V(k_v))$. Enfin pour presque toute place finie v, f_v est la fonction caractéristique du réseau r_v^n.

Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est alors l'espace des combinaisons linéaires finies de fonctions décomposables telles que $f_v \in \mathscr{S}(V(k_v))$ pour toute place v.

PROPOSITION 5. *Soit* x *une matrice de* $G(\mathbf{A}_k)$, φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, ω *un quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^\times$ *(i.e. un morphisme continu de* $\mathbf{A}_k^\times$ *dans* $\mathbf{C}^\times$ *trivial sur* $k^\times$*),* σ *l'unique réel tel que*

$$| \omega | = \omega_\sigma \quad \text{où} \quad \omega_\sigma(t) = | t |_{\mathbf{A}_k}^\sigma ;$$

alors l'intégrale

$$M(\varphi, x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(\mathrm{et}\, x)\omega(\det tx)d\mu(t)$$

converge pour σ *réel plus grand que* $1/n$.

Démonstration. On peut supposer que la matrice x est la matrice unité et que la fonction φ est décomposable:

$$\varphi = \prod_v \varphi_v , \qquad \varphi_v \in \mathscr{S}(V(k_v))$$

et φ_v est la fonction caractéristique de r_v^n pour presque toute place finie v. Soit K_v le support de la fonction φ_v, il existe un entier c_v tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n ,$$

où r_v^n désigne le r_v-module engendré dans $V(k_v)$ par la base canonique. Soit σ_v la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ et M_v le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} | \varphi_v(x) | ;$$

on a l'égalité suivante:

$$| \varphi_v(x) | \leqslant M_v \cdot \sigma_v(x) .$$

D'autre part

$$\int_{k_v^\times} \sigma_v(et_v) \cdot | t_v |_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) = \int_{|t_v|_v \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v}} | t_v |_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) ,$$

car

$$et_v = (0, ..., 0, t_v) \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$$

si et seulement si

$$| t_v |_v \leqslant | \pi_v |_v^{-c_v} .$$

Mais

$$\int_{|t_v| \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v}} | t_v |_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) = \sum_{r_v = -c_v}^{\infty} \int_{|t_v|_v = |\pi_v|_v^{r_v}} | \pi_v |_v^{r_v n\sigma} \, d\mu_v(t_v) .$$

Posons $q_v = | \pi_v |_v^{-1} > 1$; on obtient:

$$\sum_{r_v = -c_v}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma} \cdot \int_{|t_v|_v = 1} d\mu_v(t_v) = m_v \, q_v^{c_v n\sigma} \cdot \sum_{r_v = 0}^{\infty} q_v^{-r_v n\sigma}$$
$$= m_v \, q_v^{c_v n\sigma} (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma > 0 .$$

Les réels M_v et m_v sont presque toujours égaux à 1 et l'entier c_v presque toujours nul, donc le produit des intégrales

$$\int_{k_v^\times} | \varphi_v(et_v) | \cdot | t_v |_v^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v)$$

aux places finies est convergent lorsque le produit $\prod_v (1 - q_v^{-n\sigma})^{-1}$ converge, c'est-à-dire quand $n\sigma > 1$ ou encore $\sigma > 1/n$.

Aux places infinies l'intégrale converge si elle converge à l'origine autrement dit si $\sigma > 0$. La proposition 5 est démontrée.

Soit P le sous-groupe de G des matrices qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où a est une matrice de GL_{n-1}, b est un vecteur colonne ayant $(n-1)$ composantes, d est un élément de l'anneau de base tel que $d \cdot \det a$ soit inversible dans cet anneau; on définit les séries d'Eisenstein de la manière suivante:

PROPOSITION 6. *Pour* $x \in G(\mathbf{A}_k)$, ω *un quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^\times$ *tel que*

$$|\omega| = \omega_\sigma, \qquad \sigma \in \mathbf{R},$$

la série

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

converge pour $\sigma > 1$; *on l'appelle la série d'Eisenstein associée à la fonction* φ *de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$.

Enonçons d'abord le résultat suivant:

LEMME. *L'intégrale*

$$I_1 = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |t|_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} |\varphi(\xi t x)| \, d\mu(t)$$

est convergente si $\sigma > 1$.

Démonstration. Comme la fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est quelconque, on peut supposer $x = 1$.

A) k *de caractéristique* 0.

Soit P_∞ l'ensemble des places infinies de k, on pose:

$$\Omega(P_\infty) = \prod_{v \in P_\infty} k_v^\times \cdot \prod_{v \notin P_\infty} r_v^\times .$$

On sait que le groupe $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est fini, isomorphe au groupe C_k des classes d'idéaux de k. Soit Y un système de représentants dans $\mathbf{A}_k^\times$ du quotient $\Omega(P_\infty) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$; l'application canonique de $Y \cdot \Omega(P_\infty)$ dans $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est surjective.

Supposons qu'un élément α de $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ s'écrive de deux manières distinctes:

$$\alpha = y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2 ,$$

avec

$$y_1, y_2 \in Y \quad \text{et} \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(P_\infty) .$$

Alors il existe α dans $k^\times$ tel que

$$\alpha y_1 \omega_1 = y_2 \omega_2 ,$$

ce qui entraîne l'égalité de y_1 et y_2 car ce sont des représentants du quotient $k^\times \cdot \Omega(P_\infty) \backslash \mathbf{A}_k^\times$. Ainsi

c'est-à-dire $\alpha \in r^\times$, r désignant l'anneau des entiers de k. On a donc un isomorphisme

$$Y \cdot r^\times \backslash \Omega(P_\infty) \to k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times .$$

L'intégrale I_1 se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \int_{t \in r^\times \backslash \Omega(P_\infty)} | yt |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi y t) | \, d\mu(t) \\ &\leqslant \sum_{y \in Y} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} | yt |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi y t) | \, d\mu(t) . \end{aligned}$$

La fonction φ étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\int_{t \in \Omega(P_\infty)} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi t) | \cdot | t |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \, d\mu(t) ,$$

ou encore celle de

$$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(P_\infty)} | \varphi(\xi t) | \cdot | t |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \, d\mu(t) ,$$

ce qui se réécrit

$$I_2 = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} J_v(\xi) \right], \tag{1}$$

avec

$$I_v(\xi) = \int_{t_v \in k_v^\times} | \varphi_v(\xi t_v) | \cdot | t_v |_{k_v}^{n\sigma} \, d\mu_v(t_v) ,$$

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} | \varphi_v(\xi t_v) | \cdot d\mu_v(t_v) ,$$

et

$$\begin{aligned} | t_v |_{k_v} &= | t_v | \quad \text{si} \quad k_v = \mathbf{R} , \\ &= | t_v |^2 \quad \text{si} \quad k_v = \mathbf{C} . \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 2, on note K_v le support de la fonction φ_v, c_v l'entier tel que

$$K_v \subset \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n .$$

De plus, on note σ_v la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$ et M_v le réel positif défini par

$$M_v = \sup_{x \in V(k_v)} |\varphi_v(x)|$$

(l'entier c_v est nul et le réel M_v vaut 1 pour presque toutes les places finies v). Alors

$$\prod_{v \notin P_\infty} J_v \leqslant \prod_{v \notin P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} \sigma_v(\xi t_v) d\mu_v(t_v) . \tag{2}$$

Donnons une condition sur ξ pour qu'en toute place finie v, $\xi t_v \in \pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$.

Soit $f = \prod_{v \notin P_\infty} |\pi_v|_v^{-c_v} \in \mathbf{N} \subset r$ (r anneaux des entiers de k), alors

$$|f|_v = |\pi_v|_v^{c_v} ;$$

on a les équivalences successives suivantes:

$$\xi t_v \in \pi_v^{-c} \cdot r_v^n \Leftrightarrow |\xi|_v \leqslant |\pi_v|_v^{-c_v} \Leftrightarrow |\xi|_v \leqslant |f|_v^{-1} \Leftrightarrow |f\xi|_v \leqslant 1 \Leftrightarrow f\xi \in r_v^n ;$$

et on en déduit que ξt_v sera dans $\pi_v^{-c_v} r_v^n$ pour tout v fini si et seulement si $\xi \in f^{-1} r^n$. Si $\xi \notin f^{-1} r^n$, l'une au moins des intégrales $J_v(\xi)$ est nulle et il suffit donc, dans la définition de I_2, de sommer sur les $\xi \in f^{-1} r^n$. On en déduit alors de (1) et (2) la majoration

$$I_2 \leqslant \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left(\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \cdot \prod_{v \notin P_\infty} M_v \int_{t_v \in r_v^\times} d\mu_v(t_v) \right),$$

puis

$$I_2 \leqslant \left(\prod_{v \notin P_\infty} M_v \cdot m_v \right) \sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \left[\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \right],$$

où m_v est le réel positif défini en III.1.
Mais les fonctions φ_v où v est une place infinie sont à décroissance rapide donc:

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leqslant \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{t_v \in k_v^\times} (1 + \|\xi t_v\|)^{-N} \cdot |t_v|^{\alpha n \sigma} d\mu_v(t_v) ,$$

où $\alpha = 1$ si $k_v = \mathbf{R}$, $\alpha = 2$ si $k_v = \mathbf{C}$.
On fait le changement de variables suivant:

si v est une place réelle: $\quad u_v = \| \xi \| \cdot t_v$,

si v est une place complexe: $\quad u_v = \| \xi \|^{\frac{1}{2}} \cdot t_v$,

alors $| u_v |_{k_v} = \| \xi \| \cdot | t_v |_{k_v}$ de sorte que

$$\prod_{v \in P_\infty} I_v(\xi) \leqslant \| \xi \|^{-n\sigma d} \prod_{v \in P_\infty} C_{v,N} \int_{u_v \in k_v^\times} (1+|u_v|_{k_v})^{-N} \cdot | u_v |_{k_v}^{n\sigma} \, d\mu_v(u_v),$$

où d désigne la dimension de k sur $\mathbf{Q}$.

— Si $k_v = \mathbf{R}$, l'intégrale correspondante dans le produit se réécrit:

$$\int_{t \in \mathbf{R}^\times} (1+|t|)^{-N} \cdot | t |^{n\sigma} \frac{dt}{| t |}$$

intégrale qui converge à l'infini si N est choisi assez grand et en 0 si $\sigma > 0$.

— Si $k_v = \mathbf{C}$, l'intégrale se réécrit:

$$2 \int_{z \in \mathbf{C}^\times} (1+|z|^2)^{-N} \cdot | z |^{2n\sigma - 2} \, dx \, dy = 2 \int_\rho \int_\theta (1+\rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma - 1} d\rho \, d\theta$$

$$= 4\pi \int_\rho (1+\rho^2)^{-N} \cdot \rho^{2n\sigma - 1} \, d\rho,$$

intégrale qui converge à l'infini si N est choisi assez grand et en 0 si $2n\sigma - 1 > -1$ c'est-à-dire si $\sigma > 0$.

Il reste à montrer la convergence de la série

$$\sum_{\xi \in f^{-1} r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} = \sum_{\xi \in r^n} \| f^{-1} \xi \|^{-n\sigma d} = | f |^{n\sigma d} \cdot \sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d};$$

on est donc ramené à la convergence de

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d}.$$

Si la norme utilisée est la norme définie par

$$\| \xi \| = \sup_i | \xi_i | \quad \text{pour} \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

on obtient les égalités suivantes:

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} = \sum_{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in r^n} \sup_i | \xi_i |^{-n\sigma d}$$

$$= \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i | z_1^i \omega_1 + \ldots + z_d^i \omega_d |^{-n\sigma d},$$

avec $z = (z_1^1, ..., z_d^1, ..., z_1^n, ..., z_d^n)$, et $(\omega_1, ..., \omega_d)$ est une base fondamentale du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel k. Ainsi

$$\sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} \leqslant | \omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_i | z_1^i + ... + z_d^i |^{-n\sigma d},$$

où ω_{i_0} est un élément de la base fondamentale tel que

$$| \omega_{i_0} | = \sup_{i=1 \text{ à } n} | \omega_i | .$$

On a encore les majorations suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in r^n} \| \xi \|^{-n\sigma d} &\leqslant | \omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} d^{-n\sigma d} \sup_i \sup_j | z_j^i |^{-n\sigma d} \\ &= | d\omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \sup_{i,j} | z_j^i |^{-n\sigma d} \\ &= | d\omega_{i_0} |^{-n\sigma d} \sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \| z \|^{-n\sigma d} . \end{aligned}$$

On sait que la série $\sum_{z \in \mathbf{Z}^{nd}} \| z \|^{-n\sigma d}$ converge pour $\sigma > 1$.

B) *k de caractéristique p*

On suppose que k est une extension algébrique de dimension finie du corps $\mathbf{F}_p(T)$. Pour chaque place v de k, k_v est de caractéristique p et si x est un élément de $k_v^\times$, le nombre $| x |_v$ est dans le sous-groupe Γ_0 de $\mathbf{R}_+^\times$ engendré par p. La même chose est vraie pour le module $| z |_{\mathbf{A}_k}$ où z est un élément de $\mathbf{A}_k^\times$. L'image de $\mathbf{A}_k^\times$ par le morphisme $z \mapsto | z |_{\mathbf{A}_k}$ est un sous-groupe non trivial du groupe Γ_0. Supposons qu'il soit engendré par un entier $Q = p^N$ avec N entier $\geqslant 1$.

Choisissons z_1 dans $\mathbf{A}_k$ tel que: $| z_1 |_{\mathbf{A}_k} = Q$. Alors $\mathbf{A}_k^\times$ est le produit direct de $\mathbf{A}_k^1$ et du sous-groupe noté Γ engendré par z_1 évidemment isomorphe à $\mathbf{Z}$. D'autre part, on pose

$$\Omega(\phi) = \prod_v r_v^\times ,$$

on sait que le groupe quotient $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$ est fini. C'est le groupe isomorphe au groupe des classes de diviseurs de degré 0. (Voir [6], p. 97).

Soit Y un système de représentants dans $\mathbf{A}_k^1$ de ce quotient; l'application canonique de $\Gamma \cdot Y$ dans $\Omega(\phi) \cdot k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est bijective et on a également un isomorphisme

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \to \Gamma \cdot Y(\Omega(\phi) \cap k^\times \backslash \Omega(\phi))$$

ou encore

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times \to \Gamma \cdot Y(\mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)),$$

où $\mathbf{F}_q$ est le corps des constantes de k c'est-à-dire le corps fini maximal contenu dans k. Ainsi l'intégrale I_1 se réécrit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \mathbf{F}_q \backslash \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m y t) | \, d\mu(t) \\ &\leqslant \sum_{y \in Y} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m y t) | \, d\mu(t) . \end{aligned}$$

La fonction φ étant quelconque, on se borne à étudier la convergence de

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | z_1^m |_{\mathbf{A}_k}^{n\sigma} \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} | \varphi(\xi z_1^m t) | \, d\mu(t) ,$$

ou encore celle de

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} | z_1 |_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_{t \in \Omega(\phi)} | \varphi(\xi z_1^m t) | \, d\mu(t) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} | z_1 |_{\mathbf{A}_k}^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \prod_v \int_{t_v \in r_v^\times} | \varphi_v(\xi z_{1,v}^m t_v) | \, d\mu_v(t_v) , \end{aligned}$$

où $z_{1,v}$ désigne la composante en la place v de l'idèle z_1.

Déterminons un idèle z_1 particulier; on le choisit tel que: $z_1 = (z_{1,v})_v$ avec $z_{1,v} = 1$ pour $v \neq v_0$, $z_{1,v_0} = \pi_{v_0}$, v_0 étant une place quelconque de k.

Alors l'intégrale I_2 se réécrit:

$$I_2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left(| \pi_{v_0} |^{mn\sigma} \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \left[\prod_{v \neq v_0} J_v(\xi) \cdot \int_{t_{v_0} \in r_{v_0}^\times} | \varphi_{v_0}(\xi t_{v_0} \pi_{v_0}^m) | \, d\mu_{v_0}(t_{v_0}) \right] \right),$$

où comme précédemment $J_v(\xi)$ désigne l'intégrale

$$J_v(\xi) = \int_{t_v \in r_v^\times} | \varphi_v(\xi t_v) | \cdot d\mu_v(t_v) .$$

On suppose toujours que $\varphi = \prod \varphi_v$ est une fonction décomposable de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et que, pour toute place v, $| \varphi_v | \leqslant M_v \sigma_v$, où σ_v est la fonction caractéristique de $\pi_v^{-c_v} \cdot r_v^n$. Pour que le produit contenu dans l'expression I_2 soit non nul, il faut que l'élément ξ de $V(k) - \{0\}$ vérifie les conditions suivantes:

$$\| \xi \|_v \leqslant | \pi_v^{-c_v} |_v \quad \text{pour} \quad v \neq v_0 ,$$
$$\| \xi \|_{v_0} \leqslant | \pi_{v_0}^{-c_{v_0}-m} |_{v_0} .$$

Posons

$$L_v = p_v^{-c_v} , \quad L_{v_0,m} = p_{v_0}^{-(c_{v_0}+m)} , \quad \text{et} \quad L_m = (L_v)_v ;$$

alors L_m est un système cohérent de k_v-réseaux de rang 1. (Voir [6], p. 97).

Soit $\Lambda(L_m) = k \cap (\prod_v L_v)$, $\Lambda(L_m)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{F}_q$ des constantes de k dont on note sa dimension $\lambda(L_m)$. (Voir [6], p. 97). Le produit contenu dans I_2 est non nul (pour m fixé) si et seulement si $\xi \in \Lambda(L_m)$.

D'autre part, soit a_m le diviseur associé au système L_m:

$$a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \, v + (c_{v_0}+m)v_0 ;$$

on sait que si son degré

$$\deg a_m = \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v + (c_{v_0}+m)\deg v_0$$

est strictement négatif, c'est-à-dire si

$$m < -c_{v_0} - (\deg v_0)^{-1} \cdot \sum_{v \neq v_0} c_v \deg v = M ,$$

alors $\lambda(L_m) = 0$ (voir [6], p. 100).

Il suffit donc dans l'expression I_2 de sommer pour $m \geqslant M$ de sorte que

$$I_2 \leqslant (\prod_v M_v m_v) \sum_{m \geqslant M} | \pi_{v_0} |^{mn\sigma} \cdot \sum_{\xi \in \Lambda(L_m)^n - \{0\}} (1) .$$

On doit étudier la convergence de

$$\sum_{m \geqslant M} | \pi_{v_0} |^{mn\sigma} (q^{n\lambda(L_m)} - 1) .$$

Sachant que pour m assez grand, le théorème de Riemann-Roch donne l'égalité

$$\lambda(L_m) = \deg a_m - g + 1 ,$$

où g est le genre de k (voir [6], Cor. 2 du Théorème 2, p. 101), on est ramené à la convergence de

$$\sum_{m \geqslant M} q^{-mn\sigma \deg v_0} q^{nm \deg v_0} = \sum_{m \geqslant M} q^{\deg v_0 (1-\sigma) mn} .$$

Cette série converge pour $\sigma > 1$.

Le résultat de la proposition 6 se déduit alors de:

PROPOSITION 7. *On a l'égalité*

$$E(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t)$$

pour ω *quasi-caractère d'exposant* $\sigma > 1$.

Démonstration. On construit l'application suivante:

$$P(k)\backslash G(k) \times k^\times \to V(k) - \{0\}$$
$$(\gamma, u) \mapsto eu\, \gamma_0$$

où γ_0 est une matrice dans la classe de γ dont le premier élément non nul sur la dernière ligne est égal à 1.

Puisque cette application est bijective, on peut écrire la série absolument convergente $\sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x)$ comme

$$\sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \varphi\,(eu\, \gamma_0\, tx)\,,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\
&= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \sum_{u \in k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \omega(\det tx)\, \varphi(eu\gamma_0 tx) d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbf{A}_k^\times} \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) d\mu(t) \\
&= \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) d\mu(t)
\end{aligned}$$

puisqu'on a ici convergence absolue. Mais l'intégrale

$$M(\varphi, \gamma_0 x, \omega) = \int_{\mathbf{A}_k^\times} \varphi(\mathrm{et}\, \gamma_0\, x) \omega(\det tx) d\mu(t)$$

ne dépend pas du représentant choisi dans la classe γ de $P(k)\backslash G(k)$, ainsi on a bien

$$\int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx) \cdot \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tx) d\mu(t)$$

$$= \sum_{\gamma\in P(k)\backslash G(k)} \int_{\mathbf{A}_k^\times} \omega(\det tx)\, \varphi(\mathrm{et}\ \gamma x) d\mu(t)$$

$$= E(\varphi, x, \omega)\,.$$

Chapitre IV

Le prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Dans la suite, k désigne un corps global, E une extension de dimension n sur k et $V(k)$ l'espace vectoriel sur k sous-jacent à E.

1. La formule de Poisson

Soit χ un caractère de $\mathbf{A}_k$ non trivial, trivial sur k et soit (x, y) la formule bilinéaire symétrique sur $V(\mathbf{A}_k)$ non dégénérée définie par

$$(x, y) = Tr(xy)\,,$$

où Tr désigne la trace absolue $Tr_{E/k}$; alors on peut identifier $V(\mathbf{A}_k)$ avec son dual topologique par l'isomorphisme qui a un élément x de $V(\mathbf{A}_k)$ associe le caractère $\chi(x, y)$ de $V(\mathbf{A}_k)$.

Soit α la mesure de Tamagawa de $\mathbf{A}_E$ pour laquelle le quotient $E\backslash\mathbf{A}$ est de mesure 1, avec l'identification précédente; la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ est définie par

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(x)\, \overline{\chi(x, y)}\, d\alpha(x), \qquad \text{pour} \qquad y \in V(\mathbf{A}_k)\,,$$

et la formule de Poisson pour le sous-groupe discret à quotient compact $V(k)$ dans $V(\mathbf{A}_k)$ s'écrit

$$\sum_{x\in V(k)} \varphi(x) = \sum_{y\in V(k)} \hat{\varphi}(y) \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))\,,$$

l'orthogonal de $V(k)$ s'identifiant à $V(k)$.

PROPOSITION 8. *Soit* φ *une fonction de* $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$; *on pose*

$$\theta(\varphi, x, t) = \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \varphi(\xi t x)$$

pour $x \in G(\mathbf{A}_k)$ et $t \in \mathbf{A}_k^\times$; alors

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right),$$

où $\check{x}$ désigne la matrice adjointe de la matrice x pour la forme bilinéaire (a, b):

$$(ax, b) = (a, b, \check{x}), \qquad a, b \in V(\mathbf{A}_k).$$

Démonstration. On pose

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi t x) \quad \text{pour} \quad \xi \in V(\mathbf{A}_k);$$

alors

$$\hat{\psi}(\eta) = \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(\xi t x)\, \overline{\chi(\xi, \eta)}\, d\alpha(\xi).$$

Si on fait le changement de variables $\xi \mapsto s = \xi t$, on obtient

$$\hat{\psi}(\eta) = |t|_{\mathbf{A}_k}^{-n} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(sx)\, \overline{\chi(st^{-1}, \eta)}\, d\alpha(s).$$

Posons encore $z = sx$; alors

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\eta) &= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z)\, \overline{\chi(zx^{-1}t^{-1}, \eta)}\, d\alpha(z) \\
&= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \int_{V(\mathbf{A}_k)} \varphi(z)\, \overline{\chi(z, \eta t^{-1} \check{x}^{-1})}\, d\alpha(z) \\
&= |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \hat{\varphi}(\eta t^{-1} \check{x}^{-1}).
\end{aligned}$$

Appliquons la formule de Poisson; on obtient l'équivalence des égalités suivantes:

$$\sum_{\xi \in V(k)} \psi(\xi) = \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\psi}(\eta),$$

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot \sum_{\eta \in V(k)} \hat{\varphi}(\eta t^{-1} \check{x}^{-1}),$$

$$\theta(\varphi, x, t) + \varphi(0) = |\det tx|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \left(\theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t^{-1}) + \hat{\varphi}(0)\right).$$

2. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein.

Définissons une relation d'équivalence sur les quasi-caractères de $\mathbf{A}_k^\times$: on dira que deux quasi-caractères sont équivalents s'ils coïncident sur les idèles $\mathbf{A}_k^1$ de module un. Sachant qu'un quasi-caractère trivial sur $\mathbf{A}_k^1$ est de la forme $|a|^s$, $s \in \mathbf{C}$, une classe d'équivalence est constituée de tous les quasi-caractères de la forme $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|^s$, où ω_0 est un caractère de $\mathbf{A}_k^\times$, représentant fixé de la classe et s un nombre complexe déterminé de manière unique par ω. On a donc paramétrisé une classe d'équivalence de quasi-caractères par une variable complexe s et on peut identifier cette classe avec un plan si *k est de caractéristique nulle et avec un cylindre si k* est de caractéristique p.

Choisissons une mesure de Haar sur $\mathbf{A}_k^\times$; sur le groupe compact $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$, on choisit la mesure de Haar μ_1 telle que $\mu_1(k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1) = 1$.

Soit N le groupe tel que l'on ait la décomposition

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times = k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1 \times N;$$

on définit une mesure μ_2 sur N par

$$d\mu_2(n) = \frac{dn}{n} \quad \text{si} \quad N = \mathbf{R}_+^\times,$$

$$\text{et} \quad \mu_2(\{1\}) = 1 \quad \text{si} \quad N \text{ est isomorphe à } \mathbf{Z}.$$

Sur le groupe $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, on considère la mesure produit $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Enfin, sur $\mathbf{A}_k^\times$, on choisit la mesure μ dont l'image dans le quotient $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est la mesure définie précédemment. On sait d'après le chapitre précédent que la série $E(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe sur l'ensemble des quasi-caractères ω de la forme $\omega_0(a) \cdot |a|^s$ avec $\operatorname{Re} s > 1$. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein sont donnés par la

Proposition 9. *On peut prolonger analytiquement les séries $E(\varphi, x, \omega)$ à l'ensemble de tous les quasi-caractères. Soit $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ le groupe des quasi-caractères d'ordre n de $\mathbf{A}_k^1$; la fonction prolongée est une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$ et holomorphe sauf si $\omega \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$ où si $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|$ avec $\omega_0 \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$; elle admet respectivement en ces points un pôle simple de résidu $\frac{1}{n}\rho\varphi(0)\omega(\det x)$ et un pôle simple de résidu $-\frac{1}{n}\rho\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)$ avec*

$$\rho = 1 \qquad \textit{si} \quad k \quad \textit{de caractéristique} \quad 0\,,$$
$$\rho = (\log Q)^{-1} \qquad \textit{si} \qquad N = \{Q^{\nu}\}_{\nu \in \mathbf{Z}}\,.$$

Enfin la fonction prolongée vérifie l'équation

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,,$$

où $\hat{\omega}$ *est le quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^{\times}$ *défini par*

$$\hat{\omega}(t) = |\,t\,| \cdot \omega^{-1}(t)\,.$$

Démonstration. On décompose la série $E(\varphi, x, \omega)$. Les idèles de module un $k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^1$ étant de mesure non nulle, on ne peut pas écrire $E(\varphi, x, \omega)$ comme la somme d'une intégrale sur les idèles $|\,t\,| \leqslant 1$ et d'une intégrale sur les idèles $|\,t\,| \geqslant 1$. Il faut donc choisir sur $\mathbf{R}_+^{\times}$, deux fonctions continues F_0 et F_1 avec les propriétés suivantes:

(i) $F_0 \geqslant 0\,, \quad F_1 \geqslant 0\,, \quad F_0 + F_1 = 1\,.$

(ii) Il existe un intervalle compact $[t_0, t_1]$ dans $\mathbf{R}_+^{\times}$ tel que

$$F_0(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < t_0\,,$$
$$F_1(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > t_1\,.$$

On demande de plus que

$$F_0(t) = F_1(t^{-1}) \quad \text{pour tout } t\,;$$

pour cela, on choisit pour F_1 une fonction continue définie sur $t \geqslant 1$ avec

$$F_1(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F_1(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1 > 1.$$

Enfin, on pose

$$F_1(t) = 1 - F_1(t^{-1}) \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1$$

et

$$F_0 = 1 - F_1\,.$$

Alors la série $E(\varphi, x, \omega)$ peut s'écrire comme une somme $E = E_0 + E_1$ avec

$$E_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det tx)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

et

$$E_1(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det x)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_1(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)\,.$$

L'intégrale $E_0(\varphi, x, \omega)$ est une fonction entière définie sur l'ensemble de tous les quasi-caractères.

Choisissons $B > 1$. Pour $\sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma \leqslant B$, $t \in \mathbf{R}_+^\times$, on a

$$t^{n\sigma} F_0(t) \leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot t^{nB} .$$

Ceci donne la majoration suivante:

$$\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det tx|_{\mathbf{A}^{k\times}}^{\sigma} \cdot |\theta(\varphi, x, t)| \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k})\, d\mu(t)$$

$$\leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det x|^{\sigma} \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{nB} \cdot |\theta(\varphi, x, t)|\, d\mu(t) ,$$

intégrale qui converge d'après le lemme de la proposition 6 du chapitre III. Ainsi, on obtient la convergence uniforme de $E_0(\varphi, x, \omega)$ sur tout compact de $\mathbf{C}$ et l'application $\omega \to E_0(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe.

On exprime à présent l'intégrale E_1 en fonction de l'intégrale E_0 en utilisant la formule de Poisson. Pour cela, on fait le changement de variables $t \mapsto t^{-1}$. Ce changement transforme la mesure de Haar μ en une mesure de Haar $c\mu$, où $c^2 = 1$ puisque c'est un homéomorphisme d'ordre 2 de $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, donc $c = 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} E_1(\varphi, x, \omega) &= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot \theta(\varphi, x, t^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) \\ &= E'_0(\varphi, x, \omega) + R_1(\varphi, x, \omega) - R_2(\varphi, x, \omega) , \end{aligned}$$

avec

$$E'_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1}\, \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) .$$

Soit T la matrice de $G(\mathbf{A}_k)$ telle qu'on ait l'égalité

$$(a, b) = (aT|b) ,$$

où $(a|b)$ désigne le produit scalaire euclidien $a \cdot {}^t b$ sur $V(\mathbf{A}_k)$; les matrices x et $\check{x}$ sont reliées par la relation

$${}^tT\, {}^t x\, {}^tT^{-1} = \check{x} ,$$

de sorte que les déterminants de x et $\check{x}$ sont égaux et

$$E'_0(\varphi, x, \omega)$$

$$= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega^{-1}(\det t\check{x}^{-1}) \cdot |\det t\check{x}^{-1}|_{\mathbf{A}_k} \cdot \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

Soit $\hat{\omega}$ le quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$ défini par

$$\hat{\omega}(t) = |t| \cdot \omega^{-1}(t);$$

alors
$$E'_0(\varphi, x, \omega) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}).$$

D'autre part, si le quasi-caractère ω s'écrit

$$\omega(t) = \omega_0(t) \cdot |t|^s,$$

où ω_0 est un caractère fixé, représentant de la classe de ω, les intégrales R_1 et R_2 se réécrivent

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \hat{\omega}(\det tx^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

$$= \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x) \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega)$$

$$= \varphi(0)\, \omega(\det x) \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

L'intégrale $\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-n}(t) d\mu(t)$ vaut 1 ou 0 suivant que ω_0^n est trivial ou non sur $\mathbf{A}_k^1$. Notons $\delta(\omega_0, n)$ ce facteur, alors

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \hat{\omega}^{-1}(\det x)\delta(\omega_0, n) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\, \omega(\det x)\, \delta(\omega_0, n) \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

Si on note

$$\lambda(s) = \int_N |t|^s F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(t),$$

on obtient

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0)\,\hat{\omega}^{-1}(\det x)\,\delta(\omega_0, n)\,\lambda(n(1-s))$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\,\omega(\det x)\,\delta(\omega_0, n)\,\lambda(-ns)\,.$$

En utilisant [6] lemme 6, § 5, chap. VII, p. 121, il s'ensuit que $E(\varphi, x, \omega)$ est une fonction holomorphe sur l'ensemble de tous les quasi-caractères sauf en $\omega(a) = \omega_0(a)$ et $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |\, a \,|$ lorsque ω_0 parcourt l'ensemble $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ des quasi-caractères d'ordre n sur $\mathbf{A}_k^1$; en ces points, la fonction $E(\varphi, x, \omega)$ admet respectivement un pôle simple de résidu $\frac{1}{n}\,\rho\varphi(0)\,\omega(\det x)$ et un pôle simple de résidu $-\frac{1}{n}\,\rho\hat{\varphi}(0)\,\hat{\omega}^{-1}(\det x)$ avec

$$\rho = 1 \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } 0 \text{ et}$$
$$\rho = (\log Q)^{-1} \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } p \text{ et } N = \{Q^\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}\,.$$

Enfin, en ce qui concerne l'équation fonctionnelle vérifiée par la série $E(\varphi, x, \omega)$, on a

$$\begin{aligned} E(\varphi, x, \omega) &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_1(\varphi, x, \omega) \\ &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + \delta(\omega_0, n)[\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda(n(1-s)) \\ &\qquad + \varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns)]\,, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + E_0(\varphi_-, x, \omega) + \delta(\omega_0, n)[\varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns) \\ + \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda(n(1-s))]\,, \end{aligned}$$

où la fonction φ_- est définie pour $\xi \in V(\mathbf{A}_k)$ par

$$\varphi_-(\xi) = \varphi(-\xi)\,.$$

Comme $E_0(\varphi_-, x, \omega) = E_0(\varphi, x, \omega)$, on obtient pour équation fonctionnell vérifiée par les séries d'Eisenstein

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,.$$

Chapitre V

CALCUL DES INTÉGRALES TOROÏDALES DES SÉRIES D'EISENSTEIN

On désigne toujours par k un corps global, par $\mathbf{A}_k$ les adèles de k, par E une extension algébrique de k de dimension n et l'espace vectoriel E_{vect} sous-jacent à E est noté $V(k)$.

On rappelle que l'on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (E\otimes\mathbf{A}_k)^\times \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & T(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "\nu"] \\ & \mathbf{A}_E^\times \end{tikzcd}$$

Soit μ_E la mesure de Haar sur le groupe des idèles de $\mathbf{A}_E$; on note μ_T la mesure de Haar du groupe multiplicatif $T(\mathbf{A}_k)$ transportée par l'isomorphisme ν^{-1}, ainsi que la mesure induite sur le quotient $T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$. On note de plus μ la mesure de Haar sur chacun des quotients $k^\times\backslash\mathbf{A}_k^\times$ et $Z(k)\backslash Z(\mathbf{A}_k)$.

Il existe une unique mesure de Haar notée $d\mu_{Z\backslash T}$ sur le quotient $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k))$, on ait

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbf{A}_k)} f(x\xi)\, d\mu(\xi)\, d\mu_{Z\backslash T}(x) = \int_{T(k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} f(x) d\mu_T(x)\,.$$

On calcule à présent l'intégrale des séries d'Eisenstein sur le tore $T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)$. Soit g *dans* $G(\mathbf{A}_k)$, φ dans $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$; on a les égalités suivantes :

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

$$= \int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} \int_{k^\times\backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det z\, tg) \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi z\, tg)\, d\mu(z) d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

$$= \int_{T(k)\backslash T(A_k)} \omega(\det tg) \sum_{\xi\in V(k)-\{0\}} \varphi(\xi tg) d\mu_T(t)\,.$$

En observant que si t est un élément de $T(\mathbf{A}_k)$, on a l'égalité

$$\det t = N_{E\backslash k}(\nu(t))\,;$$

l'intégrale précédente devient

$$\omega(\det g) \int_{E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times} \sum_{\xi\in E^\times} \varphi(\xi tg)\cdot \omega(N_{E\backslash k}(t))\, d\mu_E(t)$$

$$= \omega(\det g)\cdot \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(tg)\cdot \omega(N_{E\backslash k}(t))\, d\mu_E(t)\,.$$

Pour φ une fonction de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$ et ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_E^\times$, on pose

$$\zeta(\varphi, \omega) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t)\omega(t)\, d\mu_E(t)$$

et $$\varphi_g(t) = \varphi(tg) \quad \text{pour} \quad g \in G(\mathbf{A}_k)\,;$$

on a démontré:

THÉORÈME 1. *Soit k un corps global, E une extension algébrique finie de k de dimension n, g une matrice de $G(\mathbf{A}_k)$, φ une fonction de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}_k))$, ω un quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$; on a l'identité suivante:*

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t) = \omega(\det g)\cdot \zeta(\varphi_g, \omega\circ N_{E\backslash k})\,.$$

Remarque. L'intégrale

$$\int_{T(k)Z(\mathbf{A}_k)\backslash T(\mathbf{A}_k)} E(\varphi, tg, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(t)$$

est appelée une *intégrale toroïdale* de séries d'Eisenstein.

Chapitre VI

La formule intégrale de Hecke

Le but de ce chapitre est d'utiliser la formule établie dans le théorème 1, dans le cas particulier où k est le corps $\mathbf{Q}$ et E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, afin d'obtenir la formule intégrale de Hecke classique (Réf. [H]). Dans un premier paragraphe on construira une application de l'ensemble des matrices $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ dans l'ensemble $G(\mathbf{Z}) \cdot Z_\infty \backslash G(\mathbf{R})$ des matrices réelles et on calculera l'image par cette application du tore $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$. Dans le deuxième paragraphe, on utilisera cette application pour retrouver la formule de Hecke à partir de l'identité du chapitre précédent (Théorème 1).

1. La projection de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ sur la place à l'infini

A. *La projection* $\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$

L'ensemble Z_∞ désigne le sous-groupe de $G(\mathbf{A})$ constitué des matrices z telles que z_∞ soit une matrice scalaire non nulle et z_p est la matrice identité pour tout nombre p premier.

Soient $M \in G(\mathbf{A})$ et $z \in (\mathbf{A})$ avec

$$Z = \begin{pmatrix} z_p & & \\ & \ddots & \\ & & z_p \end{pmatrix}$$

où pour p fini, on exige que $z_p \in \mathbf{Z}_p^\times$ pour presque tout p et $z_p \in \mathbf{Q}_p^\times$ pour tout p.

Soit S l'ensemble des nombres premiers p tels que $z_p \notin \mathbf{Z}_p^\times$ et soit p un élément de S, il existe un entier n_p vérifiant

$$p^{n_p} \cdot z_p \in \mathbf{Z}_p^\times .$$

Soit Q la matrice scalaire de $Z(\mathbf{Q})$ dont les éléments diagonaux valent $\prod_{p \in S} p^{n_p}$; ZQ est une matrice de $Z_\infty \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$.

Soit $(ZQ)_f$ la matrice adélique coïncidant avec ZQ aux places finies et égale à 1 à la place infinie, et $(ZQ)_\infty$ la matrice adélique égale à $Z_\infty Q$ à la place infinie et égale à 1 aux places finies; on a la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ZM &= ZQ \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \cdot (ZQ)_f \cdot Q^{-1}M \\ &= (ZQ)_\infty \, Q^{-1}M(ZQ)_f \,. \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que la projection π_1 qui a un élément de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ fait correspondre la classe dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ d'un représentant quelconque de cet élément, est bien définie.

B. *Il y a une bijection* π_2 *entre* $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ *et* $G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

En effet, on considère l'application de $G(\mathbf{R})$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ qui a une matrice g de $G(\mathbf{R})$ associe la classe de $(g, 1, ..., 1, ...)$ dans $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. Cette application est surjective puisqu'on a la décomposition bien connue de $G(\mathbf{A})$:

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q}) \cdot G^+(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$$

(voir par exemple [5], pp. 143-146 pour le cas $n = 2$ et la démonstration est la même pour n quelconque).

Supposons que les matrices g et g' aient la même image. Alors on a une égalité

$$\gamma g k = \gamma' g' k' \,,$$

avec $\gamma, \gamma' \in G(\mathbf{Q})$ et $k, k' \in G(\hat{\mathbf{Z}})$; par suite

$$\gamma^{-1}\gamma' = g\, k\, k'^{-1} g'^{-1} = g\, g'^{-1} k\, k'^{-1} \,.$$

Mais l'intersection $G(\mathbf{Q}) \cap G(\mathbf{R}) \cdot G(\hat{\mathbf{Z}})$ est réduite à $G(\mathbf{Z})$; cela entraîne l'existence d'un élément σ de $G(\mathbf{Z})$ tel que

$$\gamma' = \gamma\sigma \,, \qquad g = \sigma g' \,, \qquad k = \sigma k' \,.$$

Ainsi g et g' ont la même image si et seulement si ces matrices sont congrues modulo $G(\mathbf{Z})$. On a démontré:

PROPOSITION 10. *L'application* $\pi_2 \circ \pi_1$ *où*

$$\pi_1 : G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A}) \to Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et

$$\pi_2 : Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}}) \to Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$$

sont définies comme précédemment, n'est autre que la projection canonique de $G(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})$ *sur* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$.

C. *L'image du tore* $T(\mathbf{A})$ *dans* $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$

L'image de $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) .$$

Dans le cas particulier où l'on considère un corps de nombres E sur $\mathbf{Q}$, muni d'une base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$, on déduit de la proposition 3 du chapitre II et de la remarque qui suit qu'il y a un isomorphisme ν de $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$, sur $E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$, où $r_\mathfrak{p}$ désigne le sous-anneau compact maximal de $E_\mathfrak{p}$. Ainsi $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'identifie à l'ensemble $\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$ qui se projette dans le groupe des classes d'idéaux de E

$$E_\infty^\times E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

où on a noté E_∞ le produit des complétés aux places infinies $\prod_{v\in P_\infty} E_v$. Soient h le nombre de classes de E et $(a_j)_{j=1 \text{ à } h}$, un système de représentants de ces classes dans $\mathbf{A}_E^\times$, on a une bijection

$$\mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) \to \bigcup_{j=1 \text{ à } h} a_j \cdot (\mathbf{R}^\times\backslash E_\infty^\times) .$$

En combinant cette bijection avec l'isomorphisme

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times) ,$$

on peut écrire

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}}) = \bigcup_{j=1 \text{ à } h} H_j \cdot (Z_\infty T(\mathbf{Z})\backslash T_\infty(\mathbf{A})) ,$$

où la réunion est disjointe et où la classe de la matrice $H_j \in T(\mathbf{A})$ dans $T_x(\mathbf{A}) \cdot T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ correspond à la classe de l'élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans $E_\infty^\times \cdot E^\times\backslash \mathbf{A}_E^\times/(\prod r_\mathfrak{p}^\times)$. On choisit de plus H_j telle que

$$(H_j)_\infty = 1 .$$

On cherche à présent l'image du quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$. Si on note h_j l'image de la matrice H_j dans $Z(\mathbf{R})G(\mathbf{Z})\backslash G(\mathbf{R})$ alors l'image de $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ est $\bigcup_{j=1 \text{ à } h} h_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))$.

Reste à déterminer un système de matrices h_j. Pour chaque élément a_j de $\mathbf{A}_E^\times$ dans le système de représentants des classes d'idèles, on note $a_j = [\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ un idéal de E dont la classe correspond par I_E (voir la proposition du chapitre II) à la classe a_j.

Définition 1. On note P_j l'élément de $G(\mathbf{Q})$, matrice de passage de la base fondamentale $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de E à la base $[\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}]$ de l'idéal a_j, dont la i^e ligne est constituée des coordonnées du vecteur α_{ij} dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

D'autre part, on a le diagramme d'isomorphismes commutatif suivant déduit de la proposition 4 du chapitre II

$$\begin{array}{ccccc}
E_\infty^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / (\prod r_{\mathfrak{p}}^\times & \underset{\nu^{-1}}{\rightarrow} & T_\infty(\mathbf{A}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}}) & \subset & G_\infty(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A}) / G(\hat{\mathbf{Z}}) \\
I_E \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr & & I_T \downarrow \wr \\
\textit{Idéaux de } E & \underset{\Omega^{-1}}{\tilde{\rightarrow}} & \Omega^{-1} (\textit{Idéaux de } E) & \subset & \textit{Réseaux de } \mathbf{Q}^n
\end{array}$$

Le réseau image par I_T de la matrice $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ de $G(\mathbf{A})$ est le réseau associé à l'idéal a_j par l'application Ω^{-1}. En effet, quelque soit la place v finie, les vecteurs qui engendrent le réseau $(r_v^n \cdot P_j)$ ont pour coordonnées dans la base canonique les coordonnées de $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj}$ dans la base $(\omega_1, ..., \omega_n)$.

On en déduit que

$$H_j = (1, \prod_p (H_j)_p) \equiv (1, P_j, ..., P_j, ...) \bmod G(\hat{\mathbf{Z}})$$

et par suite la matrice h_j est l'image de $(1, P_j, ..., P_j, ...)$ dans $Z_\infty G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$, c'est-à-dire P_j^{-1}. Par suite:

PROPOSITION 11. *L'image du tore* $Z_\infty T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}) / T(\hat{\mathbf{Z}})$ *dans*

$$Z(\mathbf{R}) G(\mathbf{Z}) \backslash G(\mathbf{R})$$

est la réunion $\bigcup_{j=1}^{h} P_j^{-1} \cdot (Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}))$.

2. La formule intégrale de Hecke

On suppose toujours que E un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$. En choisissant pour g la matrice identité, la formule adélique donnée dans le théorème 1 du chapitre précédent devient

$$\int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(x) = \zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) .$$

On définit le quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times$ de la manière suivante:

$$\omega(t) = |\, t \,|_{\mathbf{A}}^{s}, \qquad t \in \mathbf{A}^\times ,$$

avec $s \in \mathbf{C}$ et $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$.

Ainsi

$$\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}(t) = |\, t \,|_{\mathbf{A}_E}^{s}, \qquad t \in \mathbf{A}_E^\times .$$

On définit la fonction φ de $\mathscr{S}(V(\mathbf{A}))$ par

$$\varphi = \prod \varphi_p$$

avec, pour les *places finies*,

$$\varphi_p(t_p) = \chi_{L_p}(t_p), \qquad t_p \in E \otimes \mathbf{Q}_p ,$$

où χ_{L_p} est la fonction caractéristique du réseau L_p engendré dans $E \otimes \mathbf{Q}_p$ par la base fondamentale $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de E sur $\mathbf{Q}$.

On note μ_p comme au chapitre II, l'isomorphisme de $E \otimes \mathbf{Q}_p$ sur $\prod_{\mathfrak{p}|p} E$; le réseau L_p étant engendré par une base fondamentale, on a

$$\mu_p(L_p) = \prod_{\mathfrak{p}|p} r_{\mathfrak{p}} ,$$

de sorte que

$$\varphi_p \circ \mu_p^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}|p} \chi r_{\mathfrak{p}} .$$

Pour la place *infinie*, on pose

$$\varphi_\infty(t) = e^{-\pi F(t)}, \qquad t \in E \otimes \mathbf{R} ,$$

avec la fonction F définie par

$$F(t) = \sum_{i=1}^{r_1} \sigma_i(t)^2 + 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\, \sigma_i(t) \,|^2 ,$$

où $(\sigma_i)_{1 \leqslant i \leqslant r_1}$ désignent les r_1 plongements de E dans $\mathbf{R}$, $(\sigma_i)_{r_1+1 \leqslant i \leqslant r_1+r_2}$

les r_2 plongements de E dans $\mathbf{C}$ non conjugués deux à deux et

$$\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_2 .$$

La fonction F peut également s'exprimer pour un élément $t = t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n$ de $E \otimes \mathbf{R}$ de la manière suivante:

$$F(t_1\omega_1 + \ldots + t_n\omega_n) = \sum_{i=1}^{r_1} (t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)})^2$$
$$+ 2 \sum_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} | t_1\omega_1^{(i)} + \ldots + t_n\omega_n^{(i)} |^2 = (t_1, \ldots, t_n)\Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} ,$$

où on a noté $\omega_j^{(i)} = \sigma_i(\omega_j)$ et Δ la matrice

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note comme au chapitre V:

μ_E la mesure de Haar sur $\mathbf{A}_E^\times$ obtenue en prenant $\mu_E = \prod \mu_\mathfrak{p}$ avec $\mu_\mathfrak{p}(r_\mathfrak{p}^\times) = 1$ pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de E, $d\mu_\mathfrak{p}(x) = \dfrac{dx}{|x|}$ pour les places réelles de E et $d\mu_\mathfrak{p}(x) = |x|^{-2} \cdot |dx \wedge d\bar{x}|$ pour les places complexes de E,

μ_T la mesure de Haar sur $T(\mathbf{A})$ et $T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})$,

μ la mesure de Haar sur $\mathbf{A}^\times$, $\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ et $Z(\mathbf{Q})\backslash Z(\mathbf{A})$,

$\mu_{Z\backslash T}$ la mesure de Haar sur $T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})$.

A) *Calcul de* $\zeta(\varphi, \omega\circ N_{E/\mathbf{Q}})$

Pour $\sigma > 1$, on a les égalités suivantes:

$$\zeta(\varphi, \omega\circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \int_{\mathbf{A}_E^\times} \varphi(t) \cdot |t|_{\mathbf{A}_E}^s \, d\mu_E(t) = \prod_\mathfrak{p} \int_{E_\mathfrak{p}^\times} \varphi_\mathfrak{p} \, |t_\mathfrak{p}| \cdot |t_\mathfrak{p}|^s \, d\mu_\mathfrak{p}(t_\mathfrak{p})$$

(cf. [6], Prop. 10, p. 119).

Alors en utilisant [6], Prop. 11, p. 120 et lemme 8, p. 127, on obtien

$$\zeta(\varphi, \omega\circ N_{E/\mathbf{Q}}) = \pi^{-r_1 s/2} \, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} (2\pi)^{r_2(1-2)} \Gamma(s)^{r_2} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\,\text{fini}} (1 - |\pi_\mathfrak{p}|^s)^{-1} ,$$

où $\pi_\mathfrak{p}$ désigne une uniformisante de $E_\mathfrak{p}$. Notons

$$G_\infty(s) = \pi^{-r_1 s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2(1-s)} \cdot \Gamma(s)^{r_2};$$

alors

$$\zeta(\varphi, \omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}) = G_\infty(s) \cdot \zeta_E(s),$$

où ζ_E désigne la fonction zeta de Dedekind de l'extension E.

B) *Calcul de l'intégrale toroïdale*

Dans la suite, on notera I l'intégrale toroïdale:

$$I = \int_{T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A})} E(\varphi, x, \omega)\, d\mu_{Z\backslash T}(x).$$

On a vu que l'image par π_1 du quotient $(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A}))$ est

$$Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$$

Mais ce groupe est isomorphe au quotient suivant:

$$(T(\mathbf{Q})Z(\mathbf{A})\backslash T(\mathbf{A}))/(T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}}))$$

LEMME. *Soit* ξ *un élément de* $G(\hat{\mathbf{Z}})$; *alors*

$$E(\varphi, x\xi, \omega) = E(\varphi, x, \omega).$$

Démonstration. On a

$$E(\varphi, x, \omega) = \sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})} M(\varphi, \gamma x, \omega)$$

et

$$M(\varphi, x, \omega) = |\det x|_{\mathbf{A}}^{s} \cdot \int_{\mathbf{A}^\times} \varphi(\mathrm{et}\, x) \cdot |t|_{\mathbf{A}}^{ns}\, d\mu(t).$$

Il suffit de montrer

$$M(\varphi, x, \omega) = M(\varphi, x\xi, \omega).$$

Mais $\xi \in G(\hat{\mathbf{Z}})$ donc $|\det \xi|_{\mathbf{A}} = 1$; de plus en chaque place finie p, $\xi_p \in G(\mathbf{Z}_p)$ donc $et_p x_p \in L_p$ si et seulement si $et_p x_p \xi_p \in L_p$, ce qui prouve le lemme.

Le groupe $T(\hat{\mathbf{Z}})/Z(\hat{\mathbf{Z}})$ étant compact, on choisit une mesure de Haar sur celui-ci de manière à ce qu'il soit de mesure 1. Si on prend sur le

groupe $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ la mesure quotient notée $\dot{\mu}_{Z\backslash T}$, on obtient comme nouvelle expression de l'intégrale I

$$I = \int_{Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})} E(\varphi, x, \omega)\, d\dot{\mu}_{Z\backslash T}(x)\,,$$

puisque la série E est invariante par l'action de $T(\hat{\mathbf{Z}})$.
On a vu que le quotient $Z_\infty T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{\mathbf{Z}})$ s'écrit comme une réunion disjointe

$$\bigcup_{j=1}^{h} H_j(Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R}))\,.$$

Notons μ_{T_∞} la mesure induite par $\mu_{Z\backslash T}$ sur le quotient $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})$; alors

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, H_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

Pour chaque indice j de 1 à h, les matrices H_j et $(h_j, 1, ..., 1, ...) = (P_j^{-1}, 1, ..., 1, ...)$ sont dans une même classe de $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/G(\hat{\mathbf{Z}})$. (Cf. la remarque au-dessus de la proposition 11).

Comme les séries E sont invariantes par l'action de $G(\mathbf{Q})$ à gauche et de $G(\hat{\mathbf{Z}})$ à droite, on obtient

$$I = \int_{Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})} \sum_{j=1}^{h} E(\varphi, h_j x, \omega) d\mu_{T_\infty}(x)\,.$$

On calcule à présent les séries $E(\varphi, x, \omega)$ dans le cas particulier où $x = (x_\infty, 1, ..., 1)$. Alors

$$\begin{aligned} E(\varphi_1(x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) &= |\det x_\infty|^s \cdot \int_{\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \int_{\mathbf{R}_+^\times \cdot \prod_p \mathbf{Z}_p^\times} |t|_{\mathbf{A}}^{ns} \cdot \varphi(\xi t x) d\mu(t) \\ &= |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi\in V(\mathbf{Q})-\{0\}} \left(\int_0^{+\infty} t^{ns} \varphi_\infty(\xi t x_\infty) \frac{dt}{t} \cdot \prod_p \int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t) \right). \end{aligned}$$

Soit ξ un élément de $V(\mathbf{Q}) - \{0\}$, de coordonnées $(\xi_1, ..., \xi_n)$; alors l'intégrale $\int_{\mathbf{Z}_p^\times} \varphi_p(\xi t) d\mu_p(t)$ est non nulle lorsque

$$\mathrm{Max}(|\xi_1|_p, ..., |\xi_n|_p) \leqslant 1\,.$$

Pour que le produit sur l'ensemble des nombres premiers des intégrales précédentes soit non nul, il faut donc choisir ξ de coordonnées $(\xi_i)_{1 \text{ à } n}$ vérifiant :

$$\xi_i \in \bigcap_p (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p) ;$$

donc ξ_i doit être un élément de $\mathbf{Z}$. Par conséquent

$$E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega) = |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{\xi \in V(k) - \{0\}} \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt .$$

D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot \varphi_\infty(\xi t x_\infty) dt = \int_0^{+\infty} t^{ns-1} \cdot e^{-\pi t^2 F(\xi x_\infty)} dt .$$

Faisons le changement de variables

$$u = \pi t^2 \cdot F(\xi x_\infty);$$

l'intégrale ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot F(\xi x_\infty)^{-\frac{ns}{2}}$$

et puisque

$$F(t_1 \omega_1 + ... + t_n \omega_n) = (t_1, ..., t_n) \Delta \cdot {}^t\overline{\Delta} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

on a

$$(*) \qquad E(\varphi, (x_\infty, 1, ..., 1, ...), \omega)$$
$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot |\det x_\infty|^s \cdot \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q x_\infty \Delta \cdot {}^t\overline{\Delta}\, {}^t\bar{x}_\infty\, {}^t q)^{-\frac{ns}{2}} .$$

Dans le cas qui nous intéresse, les matrices x_∞ ont pour valeurs

$$x_\infty = P_j^{-1} x , \quad x \in Z(\mathbf{R}) T(\mathbf{Z}) \backslash T(\mathbf{R}) .$$

On rappelle que l'on a un isomorphisme

$$\pi : (E \otimes \mathbf{R})^\times \to T(\mathbf{R})$$
$$y \mapsto \pi(y) .$$

De plus, on vérifie facilement que l'on a le

LEMME. *Soit* y *un élément de* $(E \otimes \mathbf{R})^{\times}$;

$$\pi(y) = \Delta D(y) \Delta^{-1},$$

où $D(y)$ *est la matrice diagonale* $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$.

Soit ν l'isomorphisme défini au chapitre II, en prenant pour v la place infinie, on voit que ν applique $T(\mathbf{R})$ sur $(\mathbf{R}^{+})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ et que

$$\nu \circ \pi(y) = (y^{(1)}, \ldots, y^{(r_1+r_2)}).$$

Pour $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(r_1+r_2)})$ un élément de $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$, on note

$$Ny = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} |y_i|^{e_i} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{dy_i}{|y_i|^{e_i}},$$

avec

$$e_i = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1$$

et

$$e_i = 2 \quad \text{pour} \quad r_1 + 1 \leqslant i \leqslant r_1 + r_2 .$$

Définition 2. Soit P une matrice d'ordre n réelle, symétrique, définie positive; on définit la série d'Epstein $Z(P, s)$ où s est un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} s > \frac{n}{2}$:

$$Z(P, s) = \frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (q P {}^t q)^{-s} .$$

Avec cette définition et en utilisant la relation (*), l'intégrale I se réécrit à présent

$$I = \Gamma\left(\frac{ns}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{ns}{2}} \cdot J ,$$

où J est définie par

$$J = \sum_{j=1}^{h} \int_{y=(y_1,\ldots,y_{r_1+r_2}) \in \mathscr{D}} (Ny)^s \cdot Z\left(P_j^{-1} \Delta D(y) \overline{D(y)}\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t\overline{P_j^{-1}}, \frac{ns}{2}\right) \frac{dy}{y}$$

et $\mathscr{D}$ est un domaine fondamental dans $(\mathbf{R}^{\times})^{r_1} \times (\mathbf{C}^{\times})^{r_2}$ correspondant par l'isomorphisme ν à un domaine fondamental de $Z(\mathbf{R})T(\mathbf{Z})\backslash T(\mathbf{R})$.

Posons comme nouvelles variables

$$\tau_1 = |y_1|^2 ; \ldots ; \tau_{r_1+r_2} = |y_{r_1+r_2}|^2$$

et pour toute matrice P de $G(\mathbf{R})$, écrivons

$$P^0 = (\det P)^{-1/n} \cdot P\,;$$

il vient

$$J = 2^{r_1-1}(4\pi)^{r_1} \cdot 2^{-(r_1+r_2)} \cdot |\, d_E \,|^{-s/2} \cdot K\,,$$

avec

$$K = \sum_{j=1}^{h} \int Z\left((P_j^0)^{-1}\Delta^0 D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta^0}\, {}^t(\overline{P_j^0})^{-1}, \frac{ns}{2}\right) \prod_{i=1}^{r_1+r_2} \frac{d\tau_i}{\tau_i}\,,$$

où l'intégrale porte sur les $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{r_1+r_2}) \in U/H$ et où $d_E = \det(\Delta)^2$ désigne le discriminant de E, $D(\tau)$ la matrice diagonale

$$(\tau_1, ..., \tau_{r_1+1}, ..., \tau_{r_1+r_2}, \tau_{r_1+1}, ..., \tau_{r_1+r_2})\,,$$

H le sous-espace de $(\mathbf{R}_+^\times)^{r_1+r_2}$ défini par l'équation

$$\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i^{e_i} = 1$$

et U l'image dans H des unités du corps de nombres E.

On fait encore le changement de variables suivant :

$$\mathbf{R}_+^{r_1+r_2} \to \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^r$$
$$(\tau_1, ..., \tau_{r_1+r_2}) \mapsto (u, x_1, ..., x_r)$$

où $r = r_1 + r_2 - 1$ et

$$\tau_j = u \cdot \prod_{i=1}^{r} |\, \varepsilon_i^{(j)} \,|^{2x_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant r_1 + r_2\,,$$

où $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ est un système d'unités fondamentales de E.

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\left(\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \tau_i\right) u^{-1} \cdot 2^{r_1-1} \cdot n\, R\,,$$

où R désigne le régulateur de E défini par

$$R = \frac{1}{n} \cdot 2^{r_2} \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{(1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{(r+1)} & \cdots & \varepsilon_r^{(r+1)} \end{vmatrix}$$

D'autre part, les unités de E ont pour image le réseau $\mathbf{Z}^r$ dans $\mathbf{R}^r$ et les racines de l'unité contenues dans E ont pour image le vecteur nul. Si on note w le nombre de ces racines alors le cardinal de U est $\frac{w}{2}$.

Finalement l'expression K devient

$$K = 2^{r_1} \cdot w^{-1} n\, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} Z\left(P^0_{j,x}, \frac{ns}{2}\right) dx\,,$$

où on a noté $P_{j,x}$ la matrice

$$P_{j,x} = P_j^{-1} \Delta D(\tau)\, {}^t\overline{\Delta}\, {}^t(\overline{P_j^{-1}})\,.$$

Réécrivons à présent l'égalité du théorème 1 avec les expressions qui viennent d'être calculées.

PROPOSITION 12 (Formule de Hecke). *Soit*

$$\Lambda_E(s) = (2^{r_2} \pi^{n/2} |d_E|^{\frac{1}{2}})^{-s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}\, \zeta_E(s)$$

et pour une matrice P *réelle, symétrique, définie positive, posons*

$$\Lambda(P, s) = \pi^{-s} \Gamma(s)\, Z(P, s)\,.$$

Alors

$$w \cdot \Lambda_E(s) = 2^{r_1 - 1} \cdot n\, R \sum_{j=1}^{h} \int_{x \in [0,1]^r} \Lambda\left(P^0_{j,x}, \frac{ns}{2}\right) dx\,.$$

Remarque. Il serait intéressant de faire le calcul précédent dans un cas plus général où l'on considère un quasi-caractère ω de $\mathbf{A}^\times$ quelconque. Ainsi $\omega \circ N_{E/\mathbf{Q}}$ correspond à un caractère de Hecke sur le groupe des idéaux de E (cf. [4], chap. 8, § 3, p. 156) et la difficulté est alors de calculer l'intégrale toroïdale aux places finies sur lesquelles le quasi-caractère $\omega \circ N_{E/}$ se ramifie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL, A. *Linear algebraic groups.* Benjamin (1969).
[2] BOREVITCH, Z. I. et I. R. CHAFAREVITCH. *Théorie des Nombres.* Gauthiers Villars (1967).
[3] BOURBAKI, N. *Algèbre, chapitres V, VII.* Masson (1981).
[4] GOLDSTEIN, L. J. *Analytic number theory.* Prentice Hall (1971).

[5] SHIMURA, G. *The arithmetic theory of automorphic functions.* Iwanami Shoten & Princeton Univ. Press (1971).
[6] WEIL, A. *Basic number theory.* Springer-Verlag (1967).

REFERENCES

[Ha] HARDER, G. *Period integrals of cohomology classes which are represented by Eisenstein series.* In *Automorphic forms, Representation Theory and Arithmetic*, Bombay Colloquium, Springer-Verlag, pp. 41-115 (1979).
[He] HECKE, E. *Über die Kroneckersche grenzformel für reelle quadratische körper und die klassenzahl relativ-abelscher körper. Mathematische Werke*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1970), pp. 198-207 (1917).
[L] LANG, S. $SL_2(\mathbf{R})$. Addison Wesley, Reading (1975).
[S] STARK, M. *The analytic theory of algebraic numbers. Bull. A.M.S. 81* (1975), pp. 961-972.
[T] TERRAS, A. *Fourier analysis on symmetric spaces and applications to number theory.* Univ. of Cal. at San Diego, preprint (1981).
[W] WIELONSKY, F. Intégrales toroïdales des séries d'Eisenstein et fonctions zêta. *C. R. Acad. Sci. Paris, 299* (1984), pp. 727-730.
[Z] ZAGIER, D. *Eisenstein series and the Riemann Zeta function.* In *Automorphic forms, Representation theory and Arithmetic*, Bombay Colloquium, Springer-Verlag, pp. 275-301 (1979).

(Reçu le 23 avril 1984)

Franck Wielonsky

Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
F-06034 Nice

et

Institut Max Planck
Gottfried Claren Strasse 26
D-5300 Bonn 3

vide-leer-empty