Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SÉRIES D'EISENSTEIN, INTÉGRALES TOROÏDALES ET UNE FORMULE DE HECKE

Autor: Wielonsky, Franck

Kapitel: Classes d'idéaux et extensions algébriques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54560

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$GL_n(K)$), donc surjective, et il existe donc $y \in B(K)$ tel que $xy = 1$. La définition de $T(K)$ montre que T est un sous-groupe algébrique commutatif de GL_n.

Prenons en particulier pour K une extension algébriquement close $\bar{k}$ de k; l'algèbre $B(\bar{k})$ est diagonalisable (cf. [3] chap. V, p. 29, Prop. 2); elle est donc isomorphe sur $\bar{k}$ à l'algèbre produit $\bar{k}^n$, par conséquent, le groupe $T(\bar{k})$ est isomorphe à $(\bar{k}*)^n$ ce qui démontre la

PROPOSITION 1. *Le groupe T est un tore maximal de $GL(n)$ défini sur k (et donc un sous-groupe de Cartan)* (cf. [1], § 8.5, p. 205 et 316).

Remarque. Dans le cas où E est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$, l'homomorphisme π donne bien un plongement de E dans une algèbre $B(\mathbf{Q})$ de matrices rationnelles.

Chapitre II

CLASSES D'IDÉAUX ET EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On suppose maintenant que k est un corps de nombres sur $\mathbf{Q}$ et que E est une extension de k.

Si v (resp. w) est une place de k (resp. de E), on note k_v (resp. E_w) le complété de k (resp. de E) en cette place et on pose:

$$F_v = \prod_{w|v} E_w .$$

On note μ_w l'application

$$\Sigma\lambda_i \otimes \omega_i \to \Sigma\lambda_i\omega_i$$

de $E \otimes k_v$ dans E_w (elle n'est pas injective), et si les places de E au-dessus de la place v de k sont les places $w_1, ..., w_s$, on note

$$\mu : E \otimes k_v \to F_v$$

l'application telle que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), ..., \mu_s(x)) .$$

C'est un isomorphisme de k_v-algèbres (cf. [6], Th. 4, p. 56).

Soit ν le morphisme tel que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \otimes k_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(k_v) \arrow[d, "\nu"] \\ & F_v \end{tikzcd}$$

Soit r l'anneau des entiers de k et r_v l'adhérence de r dans k_v; on note en outre R l'anneau des entiers de E et R_w son adhérence dans E_w. (C'est le sous-anneau compact maximal de E_w (cf. [6], Cor. 1, p. 83)).

Enfin, on pose

$$D_v = \prod_{w|v} R_w ;$$

c'est le sous-anneau compact maximal de l'algèbre F_v.

Remarquons que $R \otimes r_v$ est le sous-anneau compact maximal de $E \otimes k_v$. En effet, puisque R est de type fini sur r, l'anneau $R \otimes r_v$ est compact, et son image par μ_i est dense dans R_{w_i} (car R est dense dans R_{w_i}), donc lui est égale; on obtient $\mu(R \otimes r_v) = D_v$. C.Q.F.D.

Posons $\pi(R \otimes r_v) = C_v$;

on a donc un diagramme d'isomorphismes de r_v-algèbres et de sous-anneaux compacts maximaux:

$$\begin{tikzcd} R \otimes r_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & C_v \arrow[d, "\nu"] \\ & D_v \end{tikzcd}$$

On pose enfin

$$B(r_v) = B(k_v) \cap M_n(r_v) ,$$

$$G_v = \Sigma \omega_i r_v \subset E \otimes k_v ;$$

G_v est un sous r_v-module de $E \otimes k_v$, et $B(r_v)$ est un sous-anneau de C_v, car $B(r_v)$ est compact.

Remarque. On a $\pi(G_v) \subset B(r_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; autrement dit si les coefficients de la table de multiplication

$$\omega_h \omega_j = \Sigma a_{ij}^h \omega_i$$

sont dans r_v; en effet, on a

$$\pi(\omega_h) = (a_{ij}^h)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} .$$

D'autre part, notons ω^* la base duale de ω (cf. [1], p. 451); on a $B(r_v) \subset \pi(G_v)$ si et seulement si $\pi(\omega_i^*) \in M_n(r_v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Il s'ensuit que G_v est un sous-anneau compact de $E \otimes k_v$ dès que $\pi(G_v) \subset B(r_v)$. On a alors les résultats suivants:

PROPOSITION 2. 1) *Pour presque toute place* v, *on a*

$$\pi(G_v) = B(r_v) .$$

2) *Pour presque toute place* v, *on a*

$$G_v = R \otimes r_v .$$

Démonstration. Pour 1) on utilise la remarque ci-dessus. Pour 2) on voit que $\mu(G_v) = D_v$ en utilisant [6] Th. 4, p. 57. On a donc presque toujours le diagramme d'isomorphismes

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G_v = R \otimes r_v \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mu"'] & B(r_v) = C_v \arrow[d, "v"] \\ & D_v \end{tikzcd}$$

Remarque. Supposons l'anneau r principal, alors le r-module R admet une base. En effet, un module sans torsion de type fini sur un anneau principal est un module libre de rang fini (cf. [3], ch. VII, p. 19, Cor. 2).

Si ω est une telle base, c'est évidemment une base de E sur k. La table de multiplication de cette base est alors à coefficients dans r, on a donc:

$$\pi(R) \subset B(r) = B(k) \cap M_n(r)$$

et par conséquent

$$C_v = \pi(R \otimes r_v) \subset B(r_v) ,$$

donc $C_v = B(r_v)$; d'autre part

$$R \otimes r_v = \Sigma \omega_i r_v = G_v .$$

Il s'ensuit donc que lorsque l'anneau r est principal, et que l'on prend pour ω une base de R sur r, on a à chaque place v sans exception le diagramme (*).

Ecrivons $\nu(B(r_v)) = \prod_{w|v} O_w$; alors O_w est un sous-anneau de R_w. Soit S l'ensemble des places de k telles que $B(r_v) \neq C_v$. On a $O_w = R_w$ dès que w ne divise aucune place de S. Posons:

$$O = \bigcap_w (O_w \cap E) ;$$

alors O est un ordre de E et O est dense dans O_w.
On pose

$$T(r_v) = B(r_v)^\times = \{x \in B(r_v) \mid \det x \in r_v^\times \}$$

Le groupe $T(r_v)$ est un sous-groupe compact de $T(k_v)$; il est maximal dès que $v \notin S$; on a un isomorphisme

$$T(r_v) \xrightarrow{\nu} \prod_{w|v} O_w^\times .$$

Posons

$$T(\hat{r}) = \prod_v T(r_v) \quad \text{et} \quad \hat{O}^\times = \prod_w O_w^\times ;$$

Notons $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_E$) l'anneau des adèles de k (resp. de E) et $T(\mathbf{A})$ le groupe des points de T à valeurs dans $\mathbf{A}$. Avec ces notations, le résultat suivant est immédiat:

PROPOSITION 3. *L'application* ν *induit un isomorphisme*

$$T(k)\backslash T(\mathbf{A})/T(\hat{r}) \to E^\times \backslash \mathbf{A}_E^\times / \hat{O}^\times .$$

Si $S = \emptyset$, par exemple dans le cas où ω est une base de R sur r on a $O_w = R_w$ et

$$\hat{O}^\times = \prod_w R_w^\times .$$

En définitive, on obtient le résultat suivant.

Supposons $G_v = R \otimes r_v$ pour tout v. Cette condition est vérifiée si ω est une base de R sur r, ce qui est toujours possible si r est principal.
Si X est une partie de k, notons $[X]_v$ son adhérence dans k_v.

Pour $x \in T(\mathbf{A})$, soit $I_T(x)$ le réseau de k^n tel que

$$[I_T(x)]_v = r_v^n x_v \qquad \text{pour toute place } v \text{ finie}.$$

Pour $c \in \mathbf{A}_E^\times$, soit $I_E(c)$ l'idéal fractionnaire de E tel que

$$[I_E(c)]_w = c_w R_w \qquad \text{pour toute place } w \text{ finie}.$$

Enfin, pour tout idéal fractionnaire I de E on note $\Omega^{-1}(I)$ son image par l'isomorphisme Ω^{-1}.

PROPOSITION 4. *Avec les notations précédentes, si* ω *est une base de* R *sur* r, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_E^\times \arrow[r, "\nu^{-1}"] \arrow[d, "I_E"'] & T(\mathbf{A}) \arrow[d, "I_T"] \\
\text{Idéaux de } E \arrow[r, "\Omega^{-1}"] & \text{Réseaux de } k^n
\end{tikzcd}$$

Démonstration. 1°) Soit $z_v \in (E \otimes k_v)^\times$. On a

$$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v}(G_v)$$

et puisque $G_v = \Omega(r_v^n)$, il vient $\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = \Omega^{-1} \circ u_{z_v} \circ \Omega(r_v^n)$ et donc

$$\Omega^{-1}(z_v \cdot G_v) = r_v^n \cdot \pi(z_v). \tag{1}$$

2°) Soit $(c_w)_{w|v} \in \prod_{w|v} E_w^\times$. Si $G_v = R \otimes r_v$, on a $\mu^{-1}(\Pi R_w) = G_v$ et donc

$$\mu^{-1}((c_w)_{w|v}) \cdot G_v = \mu^{-1}(\Pi c_w \cdot R_w). \tag{2}$$

3°) Soit $c \in \mathbf{A}_E^\times$. On a

$$\mu([I_E(c)]_v) = \Pi c_w R_w.$$

D'autre part la relation (2) implique $\Pi c_w R_w = \mu(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v)$; on a donc

$$[I_E(c)]_v = \mu^{-1}(c)_v \cdot G_v.$$

Par la relation (1), il vient

$$\begin{aligned}
[\Omega^{-1} I_E(c)]_v &= \Omega^{-1}([I_E(c)]_v) = \Omega^{-1}(\mu^{-1}(c)_v \cdot G_v) \\
&= r_v^n \cdot \pi \circ \mu^{-1}(c)_v = r_v^n \cdot \nu^{-1}(c)_v
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\Omega^{-1}(I_E(c)) = I_T(\nu^{-1}(c))$$

et démontre la proposition.

Chapitre III

Définition et convergence des séries d'Eisenstein

Dans tout ce chapitre, k désignera un corps global et $\mathbf{A}_k$ les adèles de k.

1. Mesures sur $\mathbf{A}_k$ et $\mathbf{A}_k^\times$

On s'intéresse d'abord aux places infinies de k (dans le cas où l'extension k est un corps de nombres). Sur le corps $\mathbf{R}$, on choisit la mesure de Lebesgue usuelle notée dx et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$, on choisit la mesure de Haar $\dfrac{dx}{|x|}$. Sur le corps $\mathbf{C}$, on choisit la mesure

$$|dz \wedge d\bar{z}| = 2dx\,dy$$

et sur le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$, on prend comme mesure la mesure de Haar:

$$|z|^{-2}\,|dz \wedge d\bar{z}|\,.$$

Pour chaque place finie v de k, on note α_v une mesure de Haar sur k_v complété de k en cette place. Soit r_v le sous-anneau compact maximal de k_v on suppose que pour presque tout v, le réel positif $m_v = \alpha_v(r_v)$ est égal à 1 Alors sur le corps global $\mathbf{A}_k$, il existe une unique mesure notée α qui coïncide avec la mesure produit $\Pi\alpha_v$ sur chacun des sous-groupes ouverts $\prod_{v\in P} k_v \cdot \prod_{v\notin P} r_v$ de $\mathbf{A}_k$ où P est un ensemble fini de places de k contenant au moins les places infinies. Alors α est une mesure de Haar sur le corps $\mathbf{A}_k$ Sur le groupe multiplicatif $k_v^\times$, on sait que la mesure $\dfrac{d\alpha_v(x)}{|x|_v}$ est une mesure de Haar. ($|x|_v$ désignant le module de $x \in k_v$).