2. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein.

Définissons une relation d'équivalence sur les quasi-caractères de $\mathbf{A}_k^\times$: on dira que deux quasi-caractères sont équivalents s'ils coïncident sur les idèles $\mathbf{A}_k^1$ de module un. Sachant qu'un quasi-caractère trivial sur $\mathbf{A}_k^1$ est de la forme $|a|^s$, $s \in \mathbf{C}$, une classe d'équivalence est constituée de tous les quasi-caractères de la forme $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|^s$, où ω_0 est un caractère de $\mathbf{A}_k^\times$, représentant fixé de la classe et s un nombre complexe déterminé de manière unique par ω. On a donc paramétrisé une classe d'équivalence de quasi-caractères par une variable complexe s et on peut identifier cette classe avec un plan si *k est de caractéristique nulle et avec un cylindre si k* est de caractéristique p.

Choisissons une mesure de Haar sur $\mathbf{A}_k^\times$; sur le groupe compact $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1$, on choisit la mesure de Haar μ_1 telle que $\mu_1(k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1) = 1$.

Soit N le groupe tel que l'on ait la décomposition

$$k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times = k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1 \times N;$$

on définit une mesure μ_2 sur N par

$$d\mu_2(n) = \frac{dn}{n} \quad \text{si} \quad N = \mathbf{R}_+^\times,$$

$$\text{et} \quad \mu_2(\{1\}) = 1 \quad \text{si} \quad N \text{ est isomorphe à } \mathbf{Z}.$$

Sur le groupe $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, on considère la mesure produit $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Enfin, sur $\mathbf{A}_k^\times$, on choisit la mesure μ dont l'image dans le quotient $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$ est la mesure définie précédemment. On sait d'après le chapitre précédent que la série $E(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe sur l'ensemble des quasi-caractères ω de la forme $\omega_0(a) \cdot |a|^s$ avec $\operatorname{Re} s > 1$. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein sont donnés par la

Proposition 9. *On peut prolonger analytiquement les séries $E(\varphi, x, \omega)$ à l'ensemble de tous les quasi-caractères. Soit $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ le groupe des quasi-caractères d'ordre n de $\mathbf{A}_k^1$; la fonction prolongée est une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$ et holomorphe sauf si $\omega \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$ où si $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |a|$ avec $\omega_0 \in x_n(\mathbf{A}_k^1)$; elle admet respectivement en ces points un pôle simple de résidu $\frac{1}{n}\rho\varphi(0)\omega(\det x)$ et un pôle simple de résidu $-\frac{1}{n}\rho\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)$ avec*

$$\rho = 1 \qquad \textit{si} \quad k \quad \textit{de caractéristique} \quad 0\,,$$
$$\rho = (\log Q)^{-1} \qquad \textit{si} \qquad N = \{Q^{\nu}\}_{\nu \in \mathbf{Z}}\,.$$

Enfin la fonction prolongée vérifie l'équation

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,,$$

où $\hat{\omega}$ *est le quasi-caractère de* $\mathbf{A}_k^{\times}$ *défini par*

$$\hat{\omega}(t) = |\,t\,| \cdot \omega^{-1}(t)\,.$$

Démonstration. On décompose la série $E(\varphi, x, \omega)$. Les idèles de module un $k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^1$ étant de mesure non nulle, on ne peut pas écrire $E(\varphi, x, \omega)$ comme la somme d'une intégrale sur les idèles $|\,t\,| \leqslant 1$ et d'une intégrale sur les idèles $|\,t\,| \geqslant 1$. Il faut donc choisir sur $\mathbf{R}_+^{\times}$, deux fonctions continues F_0 et F_1 avec les propriétés suivantes:

(i) $F_0 \geqslant 0\,, \quad F_1 \geqslant 0\,, \quad F_0 + F_1 = 1\,.$

(ii) Il existe un intervalle compact $[t_0, t_1]$ dans $\mathbf{R}_+^{\times}$ tel que

$$F_0(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < t_0\,,$$
$$F_1(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > t_1\,.$$

On demande de plus que

$$F_0(t) = F_1(t^{-1}) \quad \text{pour tout } t\,;$$

pour cela, on choisit pour F_1 une fonction continue définie sur $t \geqslant 1$ avec

$$F_1(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F_1(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1 > 1.$$

Enfin, on pose

$$F_1(t) = 1 - F_1(t^{-1}) \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1$$

et

$$F_0 = 1 - F_1\,.$$

Alors la série $E(\varphi, x, \omega)$ peut s'écrire comme une somme $E = E_0 + E_1$ avec

$$E_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det tx)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

et

$$E_1(\varphi, x, \omega) = \int_{k^{\times}\backslash\mathbf{A}_k^{\times}} \omega(\det x)\, \theta(\varphi, x, t)\, F_1(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)\,.$$

L'intégrale $E_0(\varphi, x, \omega)$ est une fonction entière définie sur l'ensemble de tous les quasi-caractères.

Choisissons $B > 1$. Pour $\sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma \leqslant B$, $t \in \mathbf{R}_+^\times$, on a

$$t^{n\sigma} F_0(t) \leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot t^{nB} .$$

Ceci donne la majoration suivante:

$$\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det tx|_{\mathbf{A}^{k\times}}^{\sigma} \cdot |\theta(\varphi, x, t)| \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k})\, d\mu(t)$$

$$\leqslant t_0^{n(\sigma - B)} \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} |\det x|^{\sigma} \cdot |t|_{\mathbf{A}_k}^{nB} \cdot |\theta(\varphi, x, t)|\, d\mu(t) ,$$

intégrale qui converge d'après le lemme de la proposition 6 du chapitre III. Ainsi, on obtient la convergence uniforme de $E_0(\varphi, x, \omega)$ sur tout compact de $\mathbf{C}$ et l'application $\omega \to E_0(\varphi, x, \omega)$ est holomorphe.

On exprime à présent l'intégrale E_1 en fonction de l'intégrale E_0 en utilisant la formule de Poisson. Pour cela, on fait le changement de variables $t \mapsto t^{-1}$. Ce changement transforme la mesure de Haar μ en une mesure de Haar $c\mu$, où $c^2 = 1$ puisque c'est un homéomorphisme d'ordre 2 de $k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times$, donc $c = 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} E_1(\varphi, x, \omega) &= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot \theta(\varphi, x, t^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) \\ &= E'_0(\varphi, x, \omega) + R_1(\varphi, x, \omega) - R_2(\varphi, x, \omega) , \end{aligned}$$

avec

$$E'_0(\varphi, x, \omega) = \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1}\, \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x) \cdot |\det t^{-1}x|_{\mathbf{A}_k}^{-1} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) ,$$

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega(\det t^{-1}x)\, F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t) .$$

Soit T la matrice de $G(\mathbf{A}_k)$ telle qu'on ait l'égalité

$$(a, b) = (aT|b) ,$$

où $(a|b)$ désigne le produit scalaire euclidien $a \cdot {}^t b$ sur $V(\mathbf{A}_k)$; les matrices x et $\check{x}$ sont reliées par la relation

$${}^tT\, {}^t x\, {}^tT^{-1} = \check{x} ,$$

de sorte que les déterminants de x et $\check{x}$ sont égaux et

$$E'_0(\varphi, x, \omega)$$

$$= \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \omega^{-1}(\det t\check{x}^{-1}) \cdot |\det t\check{x}^{-1}|_{\mathbf{A}_k} \cdot \theta(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, t) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

Soit $\hat{\omega}$ le quasi-caractère de $\mathbf{A}_k^\times$ défini par

$$\hat{\omega}(t) = |t| \cdot \omega^{-1}(t);$$

alors
$$E'_0(\varphi, x, \omega) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}).$$

D'autre part, si le quasi-caractère ω s'écrit

$$\omega(t) = \omega_0(t) \cdot |t|^s,$$

où ω_0 est un caractère fixé, représentant de la classe de ω, les intégrales R_1 et R_2 se réécrivent

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^\times} \hat{\omega}(\det tx^{-1}) F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu(t)$$

$$= \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x) \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega)$$

$$= \varphi(0)\, \omega(\det x) \int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-1}(t^n) d\mu_1(t) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

L'intégrale $\int_{k^\times \backslash \mathbf{A}_k^1} \omega_0^{-n}(t) d\mu(t)$ vaut 1 ou 0 suivant que ω_0^n est trivial ou non sur $\mathbf{A}_k^1$. Notons $\delta(\omega_0, n)$ ce facteur, alors

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0) \cdot \hat{\omega}^{-1}(\det x)\delta(\omega_0, n) \cdot \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{n(1-s)} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|)$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\, \omega(\det x)\, \delta(\omega_0, n) \int_N |t|_{\mathbf{A}_k}^{-ns} \cdot F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(|t|).$$

Si on note

$$\lambda(s) = \int_N |t|^s F_0(|t|_{\mathbf{A}_k}) d\mu_2(t),$$

on obtient

$$R_1(\varphi, x, \omega) = \hat{\varphi}(0)\,\hat{\omega}^{-1}(\det x)\,\delta(\omega_0, n)\,\lambda(n(1-s))$$

et

$$R_2(\varphi, x, \omega) = \varphi(0)\,\omega(\det x)\,\delta(\omega_0, n)\,\lambda(-ns)\,.$$

En utilisant [6] lemme 6, § 5, chap. VII, p. 121, il s'ensuit que $E(\varphi, x, \omega)$ est une fonction holomorphe sur l'ensemble de tous les quasi-caractères sauf en $\omega(a) = \omega_0(a)$ et $\omega(a) = \omega_0(a) \cdot |\, a \,|$ lorsque ω_0 parcourt l'ensemble $X_n(\mathbf{A}_k^1)$ des quasi-caractères d'ordre n sur $\mathbf{A}_k^1$; en ces points, la fonction $E(\varphi, x, \omega)$ admet respectivement un pôle simple de résidu $\frac{1}{n}\,\rho\varphi(0)\,\omega(\det x)$ et un pôle simple de résidu $-\frac{1}{n}\,\rho\hat{\varphi}(0)\,\hat{\omega}^{-1}(\det x)$ avec

$$\rho = 1 \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } 0 \text{ et}$$
$$\rho = (\log Q)^{-1} \quad \text{si} \quad k \text{ de caractéristique } p \text{ et } N = \{Q^\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}\,.$$

Enfin, en ce qui concerne l'équation fonctionnelle vérifiée par la série $E(\varphi, x, \omega)$, on a

$$\begin{aligned} E(\varphi, x, \omega) &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_1(\varphi, x, \omega) \\ &= E_0(\varphi, x, \omega) + E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + \delta(\omega_0, n)[\hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda(n(1-s)) \\ &\qquad + \varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns)]\,, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) = E_0(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega}) + E_0(\varphi_-, x, \omega) + \delta(\omega_0, n)[\varphi(0)\omega(\det x)\lambda(ns) \\ + \hat{\varphi}(0)\hat{\omega}^{-1}(\det x)\lambda(n(1-s))]\,, \end{aligned}$$

où la fonction φ_- est définie pour $\xi \in V(\mathbf{A}_k)$ par

$$\varphi_-(\xi) = \varphi(-\xi)\,.$$

Comme $E_0(\varphi_-, x, \omega) = E_0(\varphi, x, \omega)$, on obtient pour équation fonctionnell vérifiée par les séries d'Eisenstein

$$E(\varphi, x, \omega) = E(\hat{\varphi}, \check{x}^{-1}, \hat{\omega})\,.$$