

4. Lattices

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$|r| < \frac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A)) |b^E|.$$

Together with 2.2 (iv) we obtain

$$|\tilde{b}^\perp| < \frac{1}{2}(m(A) + m^\perp(A)) |b^E| < |\tilde{b}^E|.$$

We find that $\tilde{\beta}$ also satisfies (*), but with $|\tilde{b}| \leq m(A)|b| - r < |b|$, a contradiction.

3.3. *End of proof.* Lemma A provides elements in G with n linearly independent translation parts whose rotation parts are smaller than $\frac{1}{2}$.

By Lemma B these elements are pure translations.

4. LATTICES

In this paragraph we collect the rudiments from lattice point theory which are necessary for the proof of Theorem II. A lattice L is a crystallographic group which consists only of translations. The elements of L (lattice points) will be identified with vectors in \mathbf{R}^n . By abuse of notation, we shall write $\omega = w = \text{trans } \omega$ for $\omega \in L$. It is well known that L is isomorphic to \mathbf{Z}^n but this fact will *not* be used in our proof of Theorem II. Notice, however that L is abelian and that the minimal distance of lattice points equals the length of the smallest non-zero element in L .

4.1. **LEMMA.** *Let L be a lattice in \mathbf{R}^n whose elements have pairwise distances ≥ 1 , and let $N(\rho)$ denote the number of lattice points in L whose distance from the origin is $\leq \rho$ ($\rho > 0$). Then*

$$N(\rho) \leq (2\rho + 1)^n.$$

Proof. The open balls of radius $\frac{1}{2}$ around the $N(\rho)$ lattice points are pairwise disjoint and all contained in a ball of radius $\rho + \frac{1}{2}$. Comparing the volumes we find $N(\rho) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)^n$.

4.2. LEMMA. Let L be a lattice in \mathbf{R}^n whose elements have pairwise distances ≥ 1 and consider a linear subspace E of \mathbf{R}^n which is spanned by k vectors $w_1, \dots, w_k \in L$. If a lattice point $w \in L$ is not contained in E , then its E^\perp -component w^\perp has length

$$|w^\perp| \geq (3 + |w_1| + \dots + |w_k|)^{-n}.$$

Proof. Let N be the integer part of $(3 + |w_1| + \dots + |w_k|)^n$. If $0 < |w^\perp| \leq 1/N$, then $0, w, 2w, \dots, Nw$ have distance ≤ 1 from E . Adding suitable integer linear combinations of w_1, \dots, w_k to each of these vectors we obtain $N + 1$ new pairwise different lattice points whose E^\perp components have not changed but whose E components are $\leq \frac{1}{2}(|w_1| + \dots + |w_k|)$. These $N + 1$ lattice points have distance $\leq 1 + \frac{1}{2}(|w_1| + \dots + |w_k|)$ from the origin, a contradiction to Lemma 4.1.

5. PROOF OF THEOREM II

For an n -dimensional crystallographic group G we let $L(G)$ be the subgroup consisting of all pure translations in G . By Theorem I, $L(G)$ is a lattice in \mathbf{R}^n . The standard observation which is “responsible” for Theorem II is

5.1. LEMMA. If $\alpha \in G$ and if $w \in L(G)$, then $A(w) \in L(G)$, ($A = \text{rot } \alpha$).

Proof. Recall that $w = \text{trans } \omega$, $\omega \in L(G)$. Now $\alpha\omega\alpha^{-1} \in G$ is a translation with translation vector $A(w)$. Hence $A(w) \in L(G)$.

5.2. *Definition.* A crystallographic group is called *normal* if

- (i) the vectors in $L(G)$ have pairwise distances ≥ 1
- (ii) $L(G)$ contains n linearly independent *unit* vectors.

We do not ask that the vectors in (ii) generate the entire lattice $L(G)$.

Our idea is to count the normal groups. This will suffice due to the following.

5.3. PROPOSITION. *Each crystallographic group G is isomorphic to a normal crystallographic group.*