1. Le cas = —1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

monodromie $t: V \to V$ de la fibration et i_+ et $i_- \circ t: V \to S^{2m+1} - V$ sont homotopes dans le complémentaire de V. On a donc

$$\begin{aligned} A(x, y) &= l(x, i_+(y)) = l(x, i_- ty) \\ &= l(i_+ x, ty) = (-1)^{m+1} l(ty, i_+ x) \\ &= (-1)^{m+1} A(ty, x) . \end{aligned}$$

Ainsi, $S(x, y) = A(x, y) + (-1)^m A(y, x) = A((1-t)x, y)$, et

$$\text{dét } S = \text{dét}(A) . \text{dét}(1-t) .$$

La forme de Seifert associée à la fibre d'un nœud fibré de dimension impaire est donc *unimodulaire.*

Remarque. La formule ci-dessus montre aussi en passant que la monodromie $t: L \to L\,(L = H_m(V)/(\text{torsion}))$ satisfait à la condition dét $(1-t) = \pm 1$. Nous retrouverons cette condition dans le contexte algébrique qui va suivre.

Il est donc assez naturel de se poser le problème suivant sur lequel Claude Weber a attiré mon attention:

PROBLÈME. *Soit S une forme bilinéaire, unimodulaire, ε-symétrique sur un $\mathbf{Z}$-module libre de génération finie L. Existe-t-il une forme $A: L \times L \to \mathbf{Z}$, unimodulaire (sans propriété de symétrie) telle que $S = A + \varepsilon A'$?*

On supposera évidemment S paire, c'est-à-dire $S(x, x) = 0 \bmod 2$ pour tout $x \in L$.

En considérant la forme de rang 2 donnée par la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(et $\varepsilon = +1$), on observe immédiatement que la réponse au problème ci-dessus peut être négative.

Pour $\varepsilon = -1$, ou pour $\varepsilon = +1$ avec S indéfinie, on peut résoudre complètement le problème posé en utilisant la classification des formes bilinéaires, unimodulaires et ε-symétriques.

1. LE CAS $\varepsilon = -1$

Dans ce cas, S antisymétrique est une somme orthogonale de plans hyperboliques

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'identité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

montre que toute forme antisymétrique, unimodulaire provient d'une forme de Seifert unimodulaire.

Pour toute la suite nous nous plaçons donc dans le cas où $\varepsilon = +1$.

2. Le cas indéfini

Si S est symétrique, indéfinie, c'est-à-dire s'il existe un vecteur $x \in \mathbf{R} \otimes L$, non nul, tel que $S_R(x, x) = 0$, on dispose encore d'une classification. (Voir [H.-M.], ou [Se], Théorème 5, p. 93.) Dans ce cas, S représente en fait 0 sur $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire il existe $x \in L$ non nul tel que $S(x, x) = 0$, et (après changement de signe éventuel) S est isomorphe à une somme orthogonale

$$S = mH \oplus n\,\Gamma_8\,, \qquad m \geqslant 1\,,$$

où H est le plan hyperbolique (symétrique cette fois) donné par la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et où Γ_8 est la forme unimodulaire entière de rang 8 définie comme suit:

Soit $\mathbf{Z}^8$ le $\mathbf{Z}$-module des points de coordonnées entières dans $\mathbf{R}^8 = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{R}e_i$ muni du produit scalaire euclidien $x \,.\, y = \sum_{i=1}^{8} x_i \,.\, y_i$. On pose $a = e_1 + e_2 + \ldots + e_8$ et $b = \frac{1}{2}a$. Soit V_0 le sous-module de $V = \mathbf{Z}^8$ formé des points dont le produit scalaire avec b est entier:

$$V_0 = \{x \in \mathbf{Z}^8 \mid x \,.\, b \in \mathbf{Z}\}\,.$$

On définit alors $\Gamma_8 = V_0 + \mathbf{Z}b$. C'est un réseau entier, pair et unimodulaire. (Voir [H.-M.] ou [Se] pour les détails.)

On a déjà vu que la forme hyperbolique