# III. Keller's Example

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

be proved *not* to contain orthomodular specimen; we refer to [9]. Here we mention but one result ([9, p. 20]); it has been crucial on the road to Keller's discovery. The idea of its proof is used again in the proof of Theorem 17 below.

THEOREM 13 (Gross-Keller). *Let* $k$ *be a non archimedean ordered field and equipped with its order topology; let* $\langle\ ,\ \rangle$ *be a definite symmetric form on the k-vector space* $\mathfrak{E}$. *Equip* $\mathfrak{E}$ *with the norm topology*

$$(\| \mathfrak{x} \| := \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle^{\frac{1}{2}} \in k^{\frac{1}{2}}).$$

*Assume that* $\mathfrak{E}$ *contains at least one orthogonal family* $(\mathfrak{e}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *that is bounded, i.e. for suitable* $\alpha, \beta \in k$

$$0 < \alpha \leqslant \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_i \rangle \leqslant \beta \quad (i \in \mathbf{N}) \tag{6}$$

*Then* $L_{\perp\perp}(\mathfrak{E}) \underset{\neq}{\subset} L_c(\mathfrak{E})$.

## III. KELLER'S EXAMPLE

The authors of [9] lamented about the "irksome" condition (6) which, indeed, need not be satisfied (*loc. cit.*, p. 89). Keller finally noticed that (6) pointed at the very crux of the matter. He considered the transcendental extension $k_0 = \mathbf{Q}(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ with the unique ordering that has $X_0 > q$ for all $q \in \mathbf{Q}$ and $X_i^n < X_{i+1}$ for all $i$ and all $n$; then he let $k$ be the completion of $k_0$ by means of Cauchy sequences. $\mathfrak{E}$ is the linear $k$-space of all $(y_i)_{i \in \mathbf{N}} \in k^{\mathbf{N}}$ such that $\sum_{\mathbf{N}} y_i^2 X_i$ exists (addition and scalar multiplication component wise) and $\langle (y_i)_{i \in \mathbf{N}}, (z_i)_{i \in \mathbf{N}} \rangle := \sum_{\mathbf{N}} y_i z_i X_i$. Original and ingenious arguments given in [18] establish orthomodularity of $\mathfrak{E}$. (This also follows from our Theorem 36 below.)

Gross noticed that Keller's construction works for valued fields ([6, 7, 20]). An example is also contained in [14, p. 237]).

Keller's choice of a field over which one can build orthomodular spaces has been good: as our results show his space exhibits the typical properties of an orthomodular space with an admissible topology (cf. Remark 29 below).