IX. Appendix: Orthomodular spaces over ordered fields

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THEOREM 34 [21]. *Let* $\mathfrak{E}$ *be a norm-topological space in the sense of Definition 31 and assume* $\varphi(2) = 0$. *Then the statements (i), (ii), (iii) in Theorem 28 are equivalent.*

Remark 35. In Definition 15, Lemma 33 and in Theorem 34 we stipulated that $\varphi(2) = 0$ for the valuation φ of the base field. However, it is neither necessary to assume this nor that char k be different from two. As technicalities increase if 2 is not a unit for φ the general case has been banned from this elementary survey. Refer to [21].

IX. APPENDIX: ORTHOMODULAR SPACES OVER ORDERED FIELDS

A Baer order of a *-field k is a subset $\Pi \subset S := \{\alpha \in k \mid \alpha = \alpha^*\}$ *with* $1 \in \Pi$, $0 \notin \Pi$, $\Pi + \Pi \subset \Pi$, $\forall \alpha \neq 0 : \alpha\Pi\alpha^* \subset \Pi$, $-\Pi \cup \Pi = S\backslash\{0\}$. ([14]). The map $\alpha \mapsto \alpha^*\alpha =: \| \alpha \|$ has the properties of a norm and defines a topology on k; if * is continuous then k is a topological *-field [14, Theorem 4.1, p. 231]. The theory of positive definite orthomodular spaces over archimedean ordered fields is settled in [9]: There are but the classical Hilbert spaces over **R**, **C**, **H**. If the order is non-archimedean we shall assume that

(15) the subgroup S generated by all $\alpha^*\alpha^{-1}$ is bounded.

There is [14, Sec. 4.5, p. 234] a valuation on k that induces the norm-topology. We remark that the boundness condition on S is always satisfied for the usual orderings on commutative fields, for Prestel's semi-orderings and for all *-ordered fields that are known hitherto.

A family $(e_\iota)_{\iota \in I}$ of vectors in a *positive definite space* $(\mathfrak{E}; \langle\ ,\ \rangle)$ over an ordered *-field k is said to satisfy the *type condition* (cf. Definition 21) iff for all $(\alpha_\iota)_{\iota \in I} \in k^I$ the following holds: if $(\langle \alpha_\iota e_\iota \rangle)_{\iota \in I}$ is bounded then $(\alpha_\iota e_\iota)_{\iota \in I}$ converges to $0 \in \mathfrak{E}$.

With this version of type condition we have

THEOREM 36. *Let* $(\mathfrak{E}; \langle\ ,\ \rangle)$ *be a positive definite space over a non-archimedean ordered *-field that satisfies (15). Then the statements (i), (ii), (iii) in Theorem 28 are equivalent.*