Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: Chapitre 1: Notations et résultats principaux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de développement limité du type (2.1) commun à tous les u_k, formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres λ_k tellement grands que l'on n'a plus $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$ (contrairement à la situation standard où λ_k est une puissance de k), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car $\lim_{k\to\infty} \lambda_k a_k \neq \lim_{k\to\infty} \lambda_{k+1} a_k$ en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions u_k, la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase $B(t) + iy$: c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphes 2.3 et 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes; nous lui en sommes très reconnaissant.

Chapitre 1: Notations et résultats principaux

1.1. Comment formuler le problème

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$; l'une des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$ (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de x_0).

On étudie un « phénomène physique » représenté par une fonction $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes qui est connue dans le passé $(u(x) = u_0(x)$ si $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0))$ et qui satisfait une équation d'évolution $Lu + c_0 u = f$, avec $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_j$ où $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et les $a_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro $c_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ici, $u_0(x)$ et $f(x)$ sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en x_0: étant données deux solutions u_1 et u_2 du problème, coïncident-elles dans tout un

voisinage de x_0? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0, ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \in \{1, ..., n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathscr{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.

A cette algèbre de Lie sont associées des variétés appelées variétés intégrales de $\mathscr{L}$. La variété $\mathscr{V}$ sera une telle variété si pour tout $x \in \mathscr{V}$, l'espace vectoriel $T_x\mathscr{V}$ coïncide avec le sous-espace de $T_x\mathbf{R}^n$ défini par $\mathscr{L}$. L'existence de variétés intégrales de $\mathscr{L}$ n'est pas automatique, et nous devrons la supposer pour obtenir certains résultats. Nous introduisons donc deux conditions « techniques » destinées à nous fournir de telles variétés intégrales, ou des variétés se comportant un peu comme des variétés intégrales.

Nous dirons que la propriété (R) est vérifiée dans l'ouvert Ω si par tout point de Ω passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$; Sussmann [25] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété soit vérifiée; rappelons que c'est classiquement le cas dans chacune des deux situations suivantes (qui constituent des critères aisément vérifiables sur un champ L donné):

1. Lorsque le rang de $\mathscr{L}$ est constant dans Ω (théorème « de Frobenius », cf. Sternberg [23, p. 132]).
2. Lorsque les coefficients a_j de L sont analytiques dans Ω (théorème de Nagano [16]).

Nous dirons que L vérifie la condition (P) dans $\omega \subset \Omega$ s'il existe des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un ouvert v de $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que $\omega \subset v \times]-T, T[\subset \Omega$, que L s'écrive

$$L = a(y, t)\,[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y] \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{dans} \quad v \times]-T, T[\,,$$

et que pour tout $y \in v$, il existe un vecteur unitaire $d(y) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que

$$b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y) \quad \text{pour tout} \quad t \in]-T, T[\,.$$

Cette condition (P) a été introduite par Nirenberg et Trèves [17] pour étudier la résolubilité locale de L, et ces auteurs ont montré que si (η, τ) était un autre choix de coordonnées locales tel que

$$L = \alpha(\eta, \tau)\,[\partial_\tau + i\beta(\eta, \tau) \cdot \partial_\eta], \qquad \beta \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}^{n-1}\,,$$

l'existence d'un vecteur $d(y)$ tel que $b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y)$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\delta(\eta)$ tel que $\beta(\eta, \tau) = |\, \beta(\eta, \tau)\,|\, \delta(\eta)$. Nous verrons au paragraphe 1.5 comment trouver à partir d'un champ L non dégénéré des coordonnées locales dans lesquelles $L = a(\partial_t + ib \cdot \partial_y)$, b à valeurs dans $\mathbf{R}^{n-1}$, si bien que par cette propriété d'invariance, la condition (P) est aisément vérifiable sur un champ L donné.

Le lecteur remarquera que si L vérifie la condition (P) dans ω, alors $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ dans $\bar{\omega}$; cependant, la condition (P) dit plus que cela: elle implique

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

Théorème 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0+a)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \textit{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

Théorème 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (L+c_0)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme

$$L = \partial_t + i[t^{k_1}\partial_{y_1} + t^{k_2}\partial_{y_2}], k_1 \neq k_2, \varphi = t.$$

Ce théorème a été démontré dans le cadre plus général des opérateurs d'ordre m quelconque par Alinhac [1] et Robbiano [19] sous la condition $k_1 = 0$.

2. Le théorème 1.2 s'applique aux deux opérateurs suivants définis dans $\mathbf{R}^2$:

$$L_{(R)} = \partial_t + it(t+y)\,\partial_y \quad \text{et} \quad L_{(P)} = \partial_t + ie^{-1/t^2}\,\partial_y, \varphi = t,$$

le premier vérifiant la condition (R), mais pas la condition (P), et réciproquement pour le second. Ce théorème 1.2 est dû à Strauss et Trèves [24] qui l'ont démontré d'une part sous la condition $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_0) = 2$ dans $\mathbf{R}^2$ (cas particulier de la condition (R)) et d'autre part en supposant que L vérifie la condition (P) dans tout un voisinage Ω de x_0.

3. Le théorème 1.2 devient faux si nous supprimons les hypothèses « techniques » ou même si nous supposons seulement que L vérifie la condition (R) dans $\mathring{\Omega}_+$; nous montrerons en effet au chapitre 4 que l'opérateur

$$\begin{cases} L = \partial_t + ie^{-1/t} \sin\dfrac{1}{t}\,\partial_y & \text{si} \quad t > 0, \\ L = \partial_t & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

ne possède pas la propriété d'unicité par rapport à $t = 0$ pourvu que l'on ajoute un terme d'ordre inférieur, bien que $\operatorname{rg} \mathscr{L} \equiv 2$ pour $t > 0$.

4. Dans l'énoncé du théorème 1.1, il convient de remarquer que l'ouvert ω ne contient pas nécessairement le point x_0; le théorème 1.1 signifie donc ceci: si nous ne savons pas toujours construire une solution de (1.1) au voisinage de x_0, nous savons du moins le faire au voisinage de x_1 pour un point x_1 arbitrairement proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. En revanche, lorsque les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées en x_0, elles le sont en tout point suffisamment proche de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et la conclusion s'applique quel que soit le terme d'ordre inférieur; le théorème 1.2 est donc bien une réciproque du théorème 1.1. Cette remarque correspond à la propriété d'unicité « stable » dont nous avons parlé au paragraphe 1.1.

5. Les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R) sont équivalentes au groupe d'hypothèses suivant: le problème est non caractéristique, et il existe un voisinage de x_0 où $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ et où la propriété (Q) introduite par Nirenberg et Trèves [17] est vérifiée (cette propriété (Q) peut s'énoncer

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

Lemme 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de* x_0 *un système de coordonnées* $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ *tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = a(y, t)\left[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)\right]$

où $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *et* $a(y, t) \neq 0$ *au voisinage de* $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = (0, \ldots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \ldots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x)\left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\alpha_j(x) + i\beta_j(x)\right) \partial_j + c_1(x)\right]$$

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, ..., n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0 . \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, ..., 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum(Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L+c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que