1.1. Comment formuler le problème

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

de développement limité du type (2.1) commun à tous les u_k, formule qui joue un rôle central pour le recollement au paragraphe 2.3. A ces difficultés s'ajoute le fait que nous devons choisir les paramètres λ_k tellement grands que l'on n'a plus $\lambda_k \sim \lambda_{k+1}$ (contrairement à la situation standard où λ_k est une puissance de k), ce qui a pour effet de multiplier les contraintes sur ces paramètres (car $\lim_{k\to\infty} \lambda_k a_k \neq \lim_{k\to\infty} \lambda_{k+1} a_k$ en général).

L'originalité du théorème réside donc dans l'assouplissement des techniques de recollement des fonctions u_k, la partie optique géométrique étant réduite au choix trivial de la phase $B(t) + iy$: c'est exactement le contraire de la méthode décrite au chapitre 2 où l'étape délicate est la construction de la phase (paragraphe 2.2), le reste (paragraphes 2.3 et 2.4) étant standard (cf. Alinhac et Zuily [3], et Alinhac [1]).

Enfin, nous tenons à remercier C. Zuily pour les discussions que nous avons eues, tout particulièrement pour la mise au point du lemme 3.3, ainsi que pour avoir bien voulu relire ces notes; nous lui en sommes très reconnaissant.

Chapitre 1: Notations et résultats principaux

1.1. Comment formuler le problème

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$; l'une des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ est le temps, mais avant de l'écrire explicitement, nous considérerons que c'est une fonction donnée $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$ (afin de pouvoir la prendre comme coordonnée près de x_0).

On étudie un « phénomène physique » représenté par une fonction $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes qui est connue dans le passé $(u(x) = u_0(x)$ si $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0))$ et qui satisfait une équation d'évolution $Lu + c_0 u = f$, avec $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_j$ où $\partial_j = \partial/\partial x_j$ et les $a_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ sont à valeurs complexes ainsi que le terme d'ordre zéro $c_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ici, $u_0(x)$ et $f(x)$ sont des données du problème.

Nous nous intéressons à l'unicité de la solution d'un tel problème indépendamment de son existence, ou plutôt à l'unicité locale en x_0: étant données deux solutions u_1 et u_2 du problème, coïncident-elles dans tout un

voisinage de x_0? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0, ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \in \{1, ..., n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathscr{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.