§5. The Vanishing Cycle Sheaf

Objekttyp: Chapter

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band (Jahr): 32 (1986)

Heft 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek* ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

§ 5. THE VANISHING CYCLE SHEAF

- 5.1. Let M be a real manifold and $f: M \to \mathbb{R}$ a continuous map. For a sheaf \mathscr{F} on M, $\mathscr{H}^{j}_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}(\mathscr{F})|_{f^{-1}(0)}$ is called the (j-th) vanishing cycle sheaf of \mathscr{F} . Here $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$. This measures how the cohomology groups of \mathscr{F} change across the fibers of f. Its algebro-geometric version is studied by Grothendieck-Deligne ([D]).
 - 5.2. Let (X, \mathcal{O}_X) be a complex manifold. Let $f: X \to \mathbb{R}$ be a C^{∞} -map and consider the vanishing cycle sheaf $\mathcal{H}^{j}_{f^{-1}(\mathbb{R}^+)}(\mathcal{O}_X) \mid_{f^{-1}(0)}$. Let s be the section of $f^{-1}(0) \to T^*X$ given by df. Then we have

PROPOSITION 5.2.1 ([KS1] § 3, [K2] § 4.2). $\mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbf{R}^+)}^{j}(\mathcal{O}_X) \mid_{f^{-1}(0)}$ has a structure of an $s^{-1}\mathcal{E}_X$ -module.

Let P be a differential operator. If $\sigma(P)$ does not vanish on $s(f^{-1}(0))$, then P has an inverse in $s^{-1}\mathcal{E}_X$ by Proposition 2.2.3. Therefore we obtain

COROLLARY 5.2.2. If
$$\sigma(P) \mid_{sf^{-1}(0)} \neq 0$$
, then
$$P \colon \mathcal{H}_{f^{-1}\mathbb{R}^{+}}^{j}(\mathcal{O}_{X}) \mid_{f^{-1}(0)} \to \mathcal{H}_{f^{-1}(\mathbb{R}^{+})}^{j}(\mathcal{O}_{X}) \mid_{f^{-1}(0)}$$

is bijective.

5.3. More generally, let \mathcal{M} be a coherent \mathcal{D}_X -module, and set

$$\mathcal{F}^{\bullet} = \mathbf{R} \mathcal{H} om_{\mathscr{D}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{M}, \mathscr{O}_{\mathbf{X}}).$$

Then the preceding corollary shows that

$$\mathbf{R}\Gamma_{f^{-1}\mathbf{R}^+}(\mathscr{F}^*)|_{f^{-1}(0)}=0 \quad \text{if} \quad s(f^{-1}(0))\cap \mathrm{Ch}(\mathscr{M})=\emptyset.$$

Here ChM denotes the characteristic variety of M.

5.4. To consider vanishing cycle sheaves is very near to the "microlocal" consideration. In this direction, see [K-S2].

§ 6. MICRO-DIFFERENTIAL OPERATORS AND THE SYMPLECTIC STRUCTURE ON THE COTANGENT BUNDLE

6.1. The ring \mathcal{E}_X is a non-commutative ring. This fact gives rise to new phenomena which are not shared by commutative rings such as the ring of