Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 1.2. Nature des hypothèses

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

voisinage de x_0? Comme tout est linéaire, cette question nous conduit (en posant $v = u_1 - u_2$) à l'étude du noyau de l'application linéaire associée: de

$$\begin{cases} Lv + c_0 v = 0 \\ v(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0), \end{cases}$$

peut-on déduire que $v = 0$ dans tout un voisinage de x_0?

A l'exception des résultats cités au chapitre 6, nous rechercherons essentiellement une propriété d'unicité « stable » dans le sens suivant: sous les hypothèses des théorèmes d'unicité (cf. théorème 1.2), la propriété d'unicité demeurera si l'on modifie le terme d'ordre zéro c_0, ou si l'on se place en un point voisin de x_0 sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Ce point de vue explique que nous ne fassions pas mention du théorème d'Holmgren, ni de théorèmes analogues; cela donne en outre à nos réciproques la forme que l'on trouvera typiquement énoncée au théorème 1.1 ci-dessous.

1.2. Nature des hypothèses

Nous introduisons maintenant les objets algébriques sur lesquels nous désirons « lire » la réponse à la question que nous avons posée. Ces objets sont construits à partir de la fonction temps φ et de l'opérateur L, et reflètent leurs propriétés près de x_0. Nous supposerons tout au long de ces notes que L est non dégénéré en x_0, c'est-à-dire que $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x_0)|^2 \neq 0$.

Commençons par une définition: Le problème est dit caractéristique si $L\varphi(x_0) = 0$. Cette définition est indépendante de la fonction φ pourvu que cette dernière définisse les mêmes demi-espaces du passé et du futur. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à l'étude du problème non caractéristique, tandis que le problème caractéristique est abordé au chapitre 5.

Nous allons construire maintenant l'objet qui permettra principalement la discussion de l'unicité: l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ associée au champ L. Par cette expression, nous désignons l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des champs réels $X = \operatorname{Re} L$, $Y = \operatorname{Im} L$ et de tous leurs commutateurs: $[X, Y] = XY - YX$, $[X, [X, Y]]$ etc. En chaque point x, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{R}^n$ dont la dimension est appelée rang de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ au point x et que nous noterons $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x)$. Comme L est non dégénéré en x_0, on a $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \in \{1, ..., n\}$ pour tout x voisin de x_0, mais le rang de $\mathscr{L}$ n'a aucune raison d'être constant lorsqu'on passe d'un point à un point voisin.

A cette algèbre de Lie sont associées des variétés appelées variétés intégrales de $\mathscr{L}$. La variété $\mathscr{V}$ sera une telle variété si pour tout $x \in \mathscr{V}$, l'espace vectoriel $T_x\mathscr{V}$ coïncide avec le sous-espace de $T_x\mathbf{R}^n$ défini par $\mathscr{L}$. L'existence de variétés intégrales de $\mathscr{L}$ n'est pas automatique, et nous devrons la supposer pour obtenir certains résultats. Nous introduisons donc deux conditions « techniques » destinées à nous fournir de telles variétés intégrales, ou des variétés se comportant un peu comme des variétés intégrales.

Nous dirons que la propriété (R) est vérifiée dans l'ouvert Ω si par tout point de Ω passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$; Sussmann [25] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette propriété soit vérifiée; rappelons que c'est classiquement le cas dans chacune des deux situations suivantes (qui constituent des critères aisément vérifiables sur un champ L donné):

1. Lorsque le rang de $\mathscr{L}$ est constant dans Ω (théorème « de Frobenius », cf. Sternberg [23, p. 132]).
2. Lorsque les coefficients a_j de L sont analytiques dans Ω (théorème de Nagano [16]).

Nous dirons que L vérifie la condition (P) dans $\omega \subset \Omega$ s'il existe des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un ouvert v de $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que $\omega \subset v \times]-T, T[\subset \Omega$, que L s'écrive

$$L = a(y, t)\,[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y] \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \text{dans} \quad v \times]-T, T[\,,$$

et que pour tout $y \in v$, il existe un vecteur unitaire $d(y) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que

$$b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y) \quad \text{pour tout} \quad t \in]-T, T[\,.$$

Cette condition (P) a été introduite par Nirenberg et Trèves [17] pour étudier la résolubilité locale de L, et ces auteurs ont montré que si (η, τ) était un autre choix de coordonnées locales tel que

$$L = \alpha(\eta, \tau)\,[\partial_\tau + i\beta(\eta, \tau) \cdot \partial_\eta], \qquad \beta \text{ à valeurs dans } \mathbf{R}^{n-1}\,,$$

l'existence d'un vecteur $d(y)$ tel que $b(y, t) = |\, b(y, t)\,|\, d(y)$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\delta(\eta)$ tel que $\beta(\eta, \tau) = |\, \beta(\eta, \tau)\,|\, \delta(\eta)$. Nous verrons au paragraphe 1.5 comment trouver à partir d'un champ L non dégénéré des coordonnées locales dans lesquelles $L = a(\partial_t + ib \cdot \partial_y)$, b à valeurs dans $\mathbf{R}^{n-1}$, si bien que par cette propriété d'invariance, la condition (P) est aisément vérifiable sur un champ L donné.

Le lecteur remarquera que si L vérifie la condition (P) dans ω, alors $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ dans $\bar{\omega}$; cependant, la condition (P) dit plus que cela: elle implique

l'existence de variétés de dimension 1 ou 2 le long desquelles le champ L reste tangent (sans qu'il s'agisse de variétés intégrales de $\mathscr{L}$) ainsi qu'une condition de signe sur les coefficients de L.

1.3. Enoncé des résultats principaux

Munis de ces notations, nous pouvons énoncer les principales réponses apportées à la question posée en 1.1.

Théorème 1.1. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$. *Si le problème est non caractéristique et si* $x_0 \in \bar{S}_3$, *alors pour tout voisinage* Ω *de* x_0, *il existe* $\omega \subset \Omega$ *avec* $\omega \cap S_3 \neq \emptyset$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0+a)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{Supp} u' = \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,, \quad \textit{et} \\ \operatorname{Supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Moralement, ce théorème signifie que pour avoir la propriété d'unicité, il est nécessaire que $\operatorname{rg} \mathscr{L} < 3$ sur la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Cette condition est également suffisante lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses « techniques » introduites au paragraphe précédent:

Théorème 1.2. *Posons* $S_3 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)$ *et* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) \geqslant 3\}$; *supposons que le problème est non caractéristique et que* $x_0 \notin \bar{S}_3$; *supposons encore qu'il existe un voisinage* Ω *de* x_0 *tel que l'une des deux hypothèses « techniques » suivantes soit vérifiée: soit* L *vérifie la condition* (R) *dans* Ω, *soit* L *vérifie la condition* (P) *dans* $\mathring{\Omega}_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. *Alors, pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (L+c_0)\,u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{cases}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

1.4. Commentaires sur les théorèmes

1. Comme nous le verrons au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 s'applique essentiellement aux opérateurs de la forme