

4. An inefficient choice

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

procedure. Since we shorten the tail at each step we eventually obtain a path which lies entirely in T and ends at say

$$(\gamma_{\bar{f}_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{\bar{f}_2} a_{x_2}^{-1} \gamma_{\bar{f}_1} a_{x_1}^{-1} g)v.$$

Then $\gamma_{\bar{f}_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{\bar{f}_1} a_{x_1}^{-1} g$ must fix v , say $\gamma_{\bar{f}_r} a_{x_r}^{-1} \dots \gamma_{\bar{f}_1} a_{x_1}^{-1} g = a_v \in G_v$. We now have

$$g = a_{x_1} \gamma_{f_1} \dots a_{x_r} \gamma_{f_r} a_v$$

and we somewhat optimistically define

$$\psi(g) = a_{x_1} \lambda_{f_1} \dots a_{x_r} \lambda_{f_r} a_v R.$$

4. AN INEFFICIENT CHOICE

Is ψ well defined? The geodesic from v to gv is certainly unique, as is the first point x_1 where it leaves T and its first edge e_m outside T . Both the edge e^1 and the group element γ_{f_1} are now determined by our original construction. The only ambiguity at this stage is the choice of the element $a_{x_1} \in G_{x_1}$ which maps e^1 to e_m . A different choice b_{x_1} will give a path from z_1 to $(\gamma_{\bar{f}_1} b_{x_1}^{-1} g)v$ which leaves T for the first time at say y_2 . The first edge outside T will project to an edge f'_2 of X/G and so on until eventually we have g expressed as

$$g = b_{x_1} \gamma_{f_1} b_{y_2} \gamma_{f'_2} \dots b_{y_s} \gamma_{f'_s} b_v.$$

We must show that $a_{x_1} \lambda_{f_1} a_{x_2} \lambda_{f_2} \dots a_{x_r} \lambda_{f_r} a_v$ and $b_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v$ determine the same left coset of R in $(*G_w)*F$.

Agree to select a_{x_1} from G_{x_1} so that the tail of the resulting path is as long as possible. Continue in this way selecting $a_{x_2}, a_{x_3} \dots$ so as to maximise the length of the tail at each stage. We shall compare any other set of choices with this rather inefficient selection.

Both a_{x_1} and b_{x_1} map e^1 to e_m , so $c = a_{x_1}^{-1} b_{x_1}$ must fix e^1 . Also, due to our particular selection of a_{x_1} , the geodesic from z_1 to x_2 is left fixed by $\gamma_{\bar{f}_1} c \gamma_{f_1}$. Therefore

$$\begin{aligned}
& b_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R \\
&= a_{x_1} \lambda_{f_1} \lambda_{\bar{f}_1} a_{x_1}^{-1} b_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R \\
&= a_{x_1} \lambda_{f_1} \lambda_{\bar{f}_1} c_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R \\
&= a_{x_1} \lambda_{f_1} (\gamma_{\bar{f}_1} c \gamma_{f_1})_{z_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R \\
&= a_{x_1} \lambda_{f_1} (\gamma_{\bar{f}_1} c \gamma_{f_1})_{x_2} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R \\
&= a_{x_1} \lambda_{f_1} a'_{x_2} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R
\end{aligned}$$

where $a'_{x_2} = (\gamma_{\bar{f}_1} c \gamma_{f_1})_{x_2}$. If x_2 happens to equal y_2 then we simplify this further to

$$a_{x_1} \lambda_{f_1} a''_{x_2} \lambda_{f_2} b_{y_3} \lambda_{f'_3} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R$$

where a''_{x_2} is the product $a'_{x_2} b_{y_2}$ in G_{x_2} . We now compare a_{x_2} with a'_{x_2} if $x_2 \neq y_2$, noting that $\gamma_{f_2} = 1$ in this case, or with a''_{x_2} if $x_2 = y_2$, and repeat the process. Eventually we obtain

$$b_{x_1} \lambda_{f_1} b_{y_2} \lambda_{f'_2} \dots b_{y_s} \lambda_{f'_s} b_v R = a_{x_1} \lambda_{f_1} a_{x_2} \lambda_{f_2} \dots a_{x_r} \lambda_{f_r} a''_v R.$$

As $g = a_{x_1} \gamma_{f_1} \dots a_{x_r} \gamma_{f_r} a_v = a_{x_1} \gamma_{f_1} \dots a_{x_r} \gamma_{f_r} a''_v$ we see that $a''_v = a_v$. This completes the proof that ψ is well defined.

5. NEAREST FIXED POINTS

To show ψ is a homomorphism we shall verify

$$\psi(hg) = \psi(h)\psi(g)$$

under the assumption that h either leaves some vertex of T fixed or is one of the elements γ_f . This is sufficient because the elements of the G_w (w a vertex of T) together with the γ_f (f an edge of $X/G - M$) form a set of generators for G .

Suppose h fixes the vertex w of T . Walk along the geodesic \overrightarrow{vw} and let x be the first vertex we meet which is left fixed by h . Then \overrightarrow{vx} is contained in T , and \overrightarrow{vx} followed by $h(\overrightarrow{vx})$ is the geodesic from v to hv . This quits T for the first time at x and we see that

$$\psi(h) = h_x R.$$