§5. The trace

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 5. THE TRACE

The fundamental idea of V. Jones which led him to the definition of his original one-variable polynomial is the construction of the trace. Originally, V. Jones used algebras which are quotients of the algebras H_n. The lifting of the trace to the Hecke algebras H_n was observed by A. Ocneanu.

The trace will commute with the inclusion $H_n \to H_{n+1}$ and therefore yield a trace on the direct limit of the H_n's. (Compare with the discussion in § 12.)

THEOREM. *Let K be a field and let $q, z \in K$ be two elements of K. Let H_n be the* Hecke *algebra over K corresponding to q. There exists a trace $\mathrm{Tr}: H_n \to K$ compatible with the inclusion $H_n \to H_{n+1}$,* i.e. *the diagram*

$$\begin{tikzcd} H_n \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{Tr}"'] & & H_{n+1} \arrow[dl, "\mathrm{Tr}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

commutes, and such that

(1) $\mathrm{Tr}(1) = 1$,

(2) Tr *is K-linear and* $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$,

(3) *If* $a, b \in H_n$, *then* $\mathrm{Tr}(aT_n b) = z\mathrm{Tr}(ab)$.

Notice that the last property enables us to calculate $\mathrm{Tr}(x)$ for an arbitrary $x \in H_n$ by using the fact that monomials in normal form generate H_n over K. For instance,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(T_1) &= z, \\ \mathrm{Tr}(T_1T_2) &= \mathrm{Tr}(T_2T_1) = z^2, \\ \mathrm{Tr}(T_1T_2T_1) &= z\mathrm{Tr}(T_1^2) = z((q-1)z+q). \end{aligned}$$

Proof. The K-linear map $\mathrm{Tr}: H_{n+1} \to K$ is defined by induction on n, using the structure lemma of § 4 (Proposition 4.1):

$$\varphi: H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \xrightarrow{\sim} H_{n+1}.$$

Starting with $\mathrm{Tr}: H_0 = K \to K$ the identity, one defines $\mathrm{Tr}: H_{n+1} \to K$ by $\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(a) + \Sigma_i\, z\mathrm{Tr}(b_i c_i)$, if $\varphi(a+\Sigma_i b_i \otimes c_i) = x$.

It is clear that if $a, b \in H_n$, then

$$\mathrm{Tr}(aT_n b) = z\mathrm{Tr}(ab)\,,$$

since $\varphi(a \otimes b) = aT_n b$.

The only statement to be proved is then:

$$\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx) \quad \text{for all} \quad x, y \in H_{n+1}\,.$$

This is proved by induction on n.

We may assume that x and y are monomials containing T_n at most once.

If y does not contain T_n at all, then writing $x = x'T_n x''$, where x', x'' are monomials in $T_1, \ldots, T_{n-1}$, one has

$$\mathrm{Tr}(xy) = z\mathrm{Tr}(x'x''y) = z\mathrm{Tr}(yx'x'') = \mathrm{Tr}(yx'T_n x'') = \mathrm{Tr}(yx)\,.$$

If y contains T_n, it suffices to check the case where $x = aT_n b$ and $y = T_n$, as is easily verified. (Here $a, b \in H_n$.)

There are various cases depending on whether or not the elements a and b actually contain T_{n-1}. The worst case is the one in which $a = a'T_{n-1}a''$, $b = b'T_{n-1}b''$ with a', a'', b', b'' belonging to H_{n-1}. We have then

$$\mathrm{Tr}(aT_n bT_n) = z\big((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + q\mathrm{Tr}(ab'b'')\big)$$
$$\mathrm{Tr}(T_n aT_n b) = z\big((q-1)\mathrm{Tr}(ab) + q\mathrm{Tr}(a'a''b)\big)\,.$$

But

$$\mathrm{Tr}(ab'b'') = \mathrm{Tr}(a'T_{n-1}a''b'b'') = z\mathrm{Tr}(a'a''b'b'')\,,$$

and

$$\mathrm{Tr}(a'a''b) = \mathrm{Tr}(a'a''b'T_{n-1}b'') = z\mathrm{Tr}(a'a''b'b'')\,.$$

Hence,

$$\mathrm{Tr}(aT_n bT_n) = \mathrm{Tr}(T_n aT_n b)$$

as desired.