Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de la façon suivante: par tout point $x \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x) = 1$ passe une variété intégrale de $\mathscr{L}$). Sous la condition (P), nous pourrions omettre l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ (car (P) dans $\mathring{\Omega}_+ \Rightarrow \bar{S}_3 \cap \Omega = \emptyset$), mais nous préférons considérer ce groupe d'hypothèses comme l'hypothèse $x_0 \notin \bar{S}_3$ à laquelle nous avons rajouté une hypothèse « technique ».

6. *Plan de l'ensemble.* Nous exposerons les techniques de construction de contre-exemples à l'unicité dans le chapitre 2 que nous consacrons à démontrer le théorème 1.1. Symétriquement, le chapitre 3 contiendra la démonstration du théorème 1.2 comme illustration des méthodes développées pour obtenir l'unicité. Par ces deux théorèmes, nous avons « génériquement » répondu à la question posée; nous avons cependant écarté trois problèmes marginaux qui feront l'objet des chapitres suivants: au chapitre 4, nous étudierons sur un modèle la situation lorsque $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ mais que les hypothèses « techniques » ne sont pas vérifiées; au chapitre 5, nous étudierons le problème caractéristique; au chapitre 6 enfin, nous étudierons l'influence du terme d'ordre zéro, c_0.

1.5. Choix des coordonnées pour les problèmes non caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous donnons pour les problèmes non caractéristiques (étudiés aux chapitres 2, 3 et 4) un choix de coordonnées permettant d'écrire sous une forme canonique l'opérateur à étudier.

Lemme 1.3. *Supposons que le problème soit non caractéristique; alors il existe près de* x_0 *un système de coordonnées* $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ *tel que:*

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = a(y, t)\left[\partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)\right]$

où $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *au voisinage de* $(0, 0)$ *et* $a(y, t) \neq 0$ *au voisinage de* $(0, 0)$.

Démonstration. Commençons par choisir des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ telles que $x_0 = (0, \ldots, 0)$ et $x_n = \varphi(x) - \varphi(x_0)$; comme le problème est non caractéristique, nous savons que $a_n(0, \ldots, 0) \neq 0$; on peut donc écrire

$$L + c_0 = a_n(x)\left[\partial_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\alpha_j(x) + i\beta_j(x)\right) \partial_j + c_1(x)\right]$$

où les $\alpha_j(x)$ et les $\beta_j(x)$ sont à valeurs réelles. Pour $k = 1, ..., n-1$, soit $y_k(x)$ la solution du système

$$\begin{cases} y_k(x', 0) = x_k \\ \partial_n y_k + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \partial_j y_k = 0 . \end{cases}$$

Si de plus nous posons $t(x) = x_n$, comme la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(y, t)}{\partial x}$ admet l'unité pour déterminant en $(0, ..., 0)$, nous pouvons utiliser (y, t) comme nouvelles coordonnées locales; nous obtenons que $L + c_0 = (Lt)\partial_t + \sum(Ly_k)\partial_{y_k} + c_0$ est de la forme 3, d'où le lemme.

Chapitre 2: Construction d'un contre-exemple

Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration du théorème 1.1. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat est désormais classique; elle a été mise au point successivement par Cohen [8], Pliś [18], Hörmander [10], Alinhac-Zuily [3]. Ici, nous suivrons de très près la démonstration du théorème 1 d'Alinhac [1] (qui, pour le premier ordre, est un cas particulier du théorème 2.2 ci-dessous avec $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$).

La technique consiste à choisir une suite de valeurs positives δ_k tendant vers 0, puis à construire par les méthodes de l'optique géométrique des fonctions u_k, pour $\varphi(x)$ voisin de $\varphi(x_0) + \delta_k$, qui soient approximativement dans le noyau de $L + c_0$: c'est ce que nous faisons en 2.2. Puis on ajuste la taille de ces fonctions afin de pouvoir les recoller pour obtenir une solution u définie au voisinage de x_0 et telle que u et $a = -(L+c_0)u/u$ soient régulières: c'est l'opération effectuée en 2.3, les dernières vérifications étant reportées en 2.4.

Afin de limiter la complexité de la construction, il convient de choisir un bon système de coordonnées. C'est ce par quoi nous commençons.

2.1. Nouveau choix de coordonnées

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.1 et fixons le voisinage Ω. Grâce au lemme 1.3, nous pouvons déjà trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ dans Ω (quitte à restreindre ce dernier) telles que