Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE
Autor: Raymond, Xavier Saint
Kapitel: 2.2. Optique géométrique
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. $x_0 = (0, 0)$
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse $x_0 \in \bar{S}_3$, on peut trouver un point $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Nous pouvons alors écrire notre opérateur $L + c_0$ sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.1. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ *et que* $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$ *pour un point* $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. *Alors, pour tout voisinage* Ω *de* x_3, *il existe un point* $x_2 \in \Omega \cap S$, *un voisinage* ω *de* x_2 *et des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* ω *avec* $(b_1(x_2), b_2(x_2))$ *linéairement indépendants.*

Démonstration. On peut déjà supposer que Ω est suffisamment petit pour que le rang de $\mathscr{L}$ reste supérieur ou égal à 3 dans $\Omega \cap S$.

Soit $k_1 = \inf \{k \geqslant 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$. Alors $k_1 < \infty$ car $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_3) \geqslant 3$. Soit donc x_1 un point de $\Omega \cap S$ tel que $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$, et soit $\omega \subset \Omega$ un voisinage de x_1 tel que $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega \cap S$. Dans ω, on a $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ avec $b_1(x) \neq 0$ si $x \in S$.

Soit maintenant $k_2 = \inf \{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x)$ et $b_1(x)$ soient linéairement indépendants$\}$. Alors $k_2 < \infty$ car $\operatorname{rg} \mathscr{L}(x_1) \geqslant 3$. On peut donc écrire dans ω, $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ et il existe un point $x_2 \in \omega \cap S$ tel que $b_1(x_2)$ et $b_2(x_2)$ soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

THÉORÈME 2.2. *Supposons que* $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$, *que* $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1}$ *et* $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *sont des fonctions* C^∞ *dans un voisinage* Ω *de* $x_0 = (y_0, 0)$ *et qu'il existe des entiers* $k_1 \geqslant 0$ *et* $k_2 > 0$ *tels que* $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$ *et* $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$ *dans* Ω *avec* $(b_1(x_0), b_2(x_0))$ *linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage* ω *de* x_0, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *vérifiant (1.1).*

2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ si $w(x, \delta)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$, indéfiniment dérivable en x pour $\delta > 0$ et dont les dérivées restent bornées quand δ tend vers 0.

PROPOSITION 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de* $(y_0, 0, 0)$ *deux fonctions* φ *et* $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ *telles que*

$$(2.1)\quad \begin{cases} \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2\, \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) & \text{pour } \delta > 0 \\ \beta(y_0, 0, 0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

et telles que pour toute fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, *il existe une fonction* $w(y, s, \varepsilon) \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ *telle que* $w(y, 0, 0) = 1$ *et*

$$(2.2)\quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \forall \nu \in \mathbf{N}, \exists \delta_{\alpha,\nu}: \text{ pour } 0 < \delta < \delta_{\alpha,\nu} \text{ et} \\ \text{pour } (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \text{ dans un voisinage fixe de } (y_0, 0) \\ \text{(indépendant de } \alpha \text{ et } \nu) \\ |\, \partial^\alpha[(L+c_0)h/h]\,| \leqslant 2\,\delta^\nu \end{cases}$$

où on a posé:

$$(2.3)\quad h(y, t, \delta) = w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp\left[-\delta^{-5/3}\gamma(y, \delta) + \delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y, t, \delta)\right]$$

(dans (2.2), ∂^α *désigne la dérivation d'ordre* α *par rapport à* y *et* t*).*

Démonstration: en trois parties.

1. *Construction de* φ *et de* β. Choisissons $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$ tel que $b_1(x_0) \cdot \eta_0 = 0$ et $b_2(x_0) \cdot \eta_0 < 0$ (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ_1 telle que

$$\begin{cases} b_1(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \\ \partial_y \psi_1(y_0, 0) = \eta_0 \end{cases}$$

et on pose:

$$\psi_2(y, t, \delta) = \int_\delta^t b(y, r) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) dr\,,$$

$$\varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) + i\psi_1(y, \delta)\,.$$

On calcule alors que:

$\psi_2(y, \delta, \delta) = 0$,

$\partial_t \psi_2(y, \delta, \delta) = b(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0$ par choix de ψ_1, et

$\partial_t^2 \psi_2(y, t, \delta) = \partial_t b(y, t) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$

$$= \left[k_1 t^{k_1-1} b_1(y,0) + (k_1+k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y,t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y,t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y,\delta)$$

$$= \left[-k_1 t^{k_1-1} \delta^{k_2} b_2(y,\delta) + (k_1+k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y,t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y,t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y,\delta)$$

$$= \delta^{k_1+k_2-1} \left[-k_1 \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1-1} b_2(y,\delta) + (k_1+k_2) \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2-1} b_2(y,t) \right.$$

$$\left. + \delta \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y,t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y,\delta) .$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\text{Re } \varphi(y,t,\delta) = \psi_2(y,t,\delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

où

$$\beta(y,\sigma,\delta) = \int_0^1 (\theta-1) \left[-k_1(1+\theta\sigma)^{k_1-1} b_2(y,\delta) \right.$$

$$+ (k_1+k_2)(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1} b_2(y, \delta(1+\theta\sigma))$$

$$\left. + \delta(1+\theta\sigma)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y,\delta) d\theta$$

ce qui donne (2.1) puisque $\beta(y_0, 0, 0) = -\frac{1}{2} k_2 b_2(y_0, 0) \cdot \eta_0 > 0$ grâce à notre choix de η_0.

Notons que

$$L\varphi(y,t,\delta) = -i\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 b(y,t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

par (2.1), et si on pose $s = \delta^{-2}(t-\delta)$,

$$L\left[\delta^{-4-k_1-k_2}\varphi(y,t,\delta)\right] = -i\delta^{-1} s^2 b(y,t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta s, \delta) .$$

2. *Construction de w.* Définissons l'opérateur M par la relation $(Mw/w) = \big((L+c_0)h/h\big)$ où h est donnée par (2.3); on calcule alors que

$$Mw = \delta^{-2}\left[\partial_s w + \varepsilon N w\right], \quad \text{avec} \quad Nw = iB \cdot \partial_y w + Cw ,$$

où B et C sont des fonctions de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ définies par:

$$B(y, s, \varepsilon) = \varepsilon^5 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s),$$
$$C(y, s, \varepsilon) = -ib(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \gamma(y, \varepsilon^3) - i\varepsilon^2 s^2 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \beta(y, \varepsilon^3 s, \varepsilon^3) + \varepsilon^5 c(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s).$$

Définissons une suite de fonctions w_j de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$w_0(y, s, \varepsilon) = 1,$$

$$w_{j+1}(y, s, \varepsilon) = \int_0^s - N w_j(y, r, \varepsilon) dr, \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0.$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant $w = \sum \varepsilon^j w_j$. Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $[0, 1]$, $\chi = 0$ sur $[2, +\infty[$ et $\chi(\varepsilon) \in [0, 1]$ pour $\varepsilon \in [0, +\infty[$. Nous posons

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y, s, \varepsilon),$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs λ_j telle que cette formule définisse une fonction w de l'espace $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. *Construction de la suite* λ_j. Nous allons montrer qu'il suffit que la suite λ_j croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$ de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les $\chi(\lambda_j \varepsilon)$ soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient k un voisinage compact de y_0, $s_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que les fonctions w_j soient bien définies dans $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0]$. Pour obtenir que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, il suffit d'imposer pour tout $J \in \mathbf{N}$,

$$\lambda_J > (J+1) \sup \{ | D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon) | \, | \, (y, s, \varepsilon) \in K, | \alpha | \leqslant J \quad \text{et} \quad j \leqslant J+1 \}$$

où D^α désigne la dérivation d'ordre α en y et s. En effet, si $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{J} \varepsilon^j w_j(y, s, \varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1} \varepsilon) w_{J+1}(y, s, \varepsilon)$$

donc si $0 < | \alpha | \leqslant J$, $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$,

$$| D^\alpha w(y, s, \varepsilon) | \leqslant \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon \, | D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon) | \leqslant 1.$$

Il en résulte que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K.

On a $w(y, 0, 0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \frac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés); il en résulte que $|(D^\gamma w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $D^\alpha(Nw_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $[(D^\beta N w_j)/w]\,[(D^{\gamma_1} w)/w] \ldots [(D^{\gamma_{|\alpha|}} w)/w]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leqslant (|\alpha|+1)!\, 2^{|\alpha|+2} \sup \{|D^\beta N w_j| \mid \beta \leqslant \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\lambda_J > (J+1)!\, 2^{J+2} \sup \{|D^\alpha N w_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leqslant J \text{ et } j \leqslant J+1\},$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{J-5}\left[Nw_J(1-\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)\right]$$

d'où $|D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leqslant J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J, on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $\nu \in \mathbf{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1+|\alpha|) + 3\nu$, que pour $(y, s, \varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha_t} D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{3\nu} = 2\delta^\nu.$$

2.3. Ajustement des fonctions u_k

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4},\ l_k = \delta_k - \delta_{k+1}\left(\sim \frac{3}{4}k^{-7/4}\right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2} l_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2} l_k \sim \frac{3}{4}k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_0)u/u$ est C^∞, il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).