2.3. Ajustement des fonctions u_k

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Il en résulte que $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ car w est continue sur K comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur K.

On a $w(y, 0, 0) = 1$, et si on a choisi le compact K assez petit, on a aussi $|w| > \frac{1}{2}$ dans K (un tel compact K pourra être choisi après coup, une fois que les λ_j auront été fixés); il en résulte que $|(D^\gamma w)/w|$ reste inférieur à 2 pour $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$. Comme on peut écrire $D^\alpha(Nw_j/w)$ comme une somme (algébrique) comportant au plus $(|\alpha|+1)! \times 2$ termes de la forme $[(D^\beta Nw_j)/w]\,[(D^{\gamma_1}w)/w] \ldots [(D^{\gamma_{|\alpha|}}w)/w]$ (avec $\alpha = \beta + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{|\alpha|}$, par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leqslant (|\alpha|+1)!\, 2^{|\alpha|+2} \sup\{|D^\beta Nw_j| \mid \beta \leqslant \alpha\}$$

pourvu que $\varepsilon \leqslant (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$. Si donc nous demandons pour tout J que

$$\lambda_J > (J+1)!\, 2^{J+2} \sup\{|D^\alpha Nw_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leqslant J \text{ et } j \leqslant J+1\},$$

alors pour $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$Mw = \varepsilon^{J-5}\left[Nw_J(1-\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)\right]$$

d'où $|D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{J-6}$ pour $|\alpha| \leqslant J$ (et $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ et $(y, s, \varepsilon) \in K$). Cette majoration étant obtenue pour tout J, on peut remplacer la condition $(\lambda_{J+1})^{-1} \leqslant \varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$ par $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$.

Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $\nu \in \mathbf{N}$ fixés, on obtient, en posant $J = 6(1+|\alpha|) + 3\nu$, que pour $(y, s, \varepsilon) \in K$ et $\varepsilon \leqslant (\lambda_J)^{-1}$,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha_t} D^\alpha(Mw/w)| \leqslant 2\varepsilon^{3\nu} = 2\delta^\nu.$$

2.3. Ajustement des fonctions u_k

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4},\ l_k = \delta_k - \delta_{k+1}\left(\sim \frac{3}{4}k^{-7/4}\right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour k suffisamment grand et $t \in]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$ pourvu que $\delta_k^{-2} l_k$ tende vers 0 lorsque k tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque $\delta_k^{-2} l_k \sim \frac{3}{4}k^{-1/4}$.

En vue de poser $u = h_k + h_{k+1}$ pour t voisin de m_k et de montrer que $a = -(L+c_0)u/u$ est C^∞, il nous faut déterminer le lieu d'équation $h_{k+1} = -h_k$ (qui est contenu dans le lieu d'équation $|h_{k+1}| = |h_k|$).

PROPOSITION 2.4. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* Y *de* y_0, *une fonction* $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ *à valeurs réelles telle que* $\gamma(y, 0) > 0$ *pour* $y \in Y$, *et trois suites de fonctions* $e_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, f_k *et* $g_k \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R})$ *à valeurs réelles telles que les fonctions* $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$ *définies en (2.3) (avec la fonction* γ *ci-dessus) vérifient* $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$ *avec*

$$(2.4)\quad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sup\limits_{Y} | f_k(y, m_k) | \right) = 0, \\ \text{et} \quad \partial_t f_k(y, t) > \dfrac{\beta_0 k^2}{2} \quad \text{sur} \quad Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[; \end{cases}$$

$$(2.5)\quad \begin{cases} \textit{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \textit{ il existe } C_\alpha \textit{ et } \nu_\alpha \in \mathbf{N} \textit{ tels que sur} \\ Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[, | \partial^\alpha f_k(y, t) | \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \textit{ et } | \partial^\alpha g_k(y, t) | \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} ; \end{cases}$$

$$(2.6)\quad \begin{cases} | h_k(y, t) | = | h_{k+1}(y, t) | \Leftrightarrow t = m_k + e_k(y) \\ \textit{et } e_k(y) = o(l_k) \quad (\textit{pour } k \to \infty). \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$\varphi_k(y, t) = \delta_k^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta_k) \text{ et } w_k(y, t) = w(y, \delta_k^{-2}(t - \delta_k), \delta_k^{1/3});$$

les constructions s'effectuent en trois temps.

1. *Construction de* γ. Nous allons choisir la fonction γ de telle sorte que

$$\operatorname{Log} | h_k(y, m_k) | - \operatorname{Log} | h_{k+1}(y, m_k) | = 0,$$

du moins si on néglige l'influence de w dans la formule (2.3). Nous posons donc

$$I_k(y) = \operatorname{Re} \varphi_k(y, m_k) - \operatorname{Re} \varphi_{k+1}(y, m_k)$$
$$= \Big[\beta(y, 0, 0) + o(1) \Big] \Big[-\frac{4}{9} \delta_k^{-5} l_k^2 + \frac{1}{9} \delta_{k+1}^{-5} l_k^2 \Big] \quad (\text{pour } k \to \infty)$$

d'après (2.1), et donc si on a choisi Y de telle façon que $\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$ (ce qui est possible grâce à (2.1)),

$$I_k(y) \sim -\frac{1}{3} \beta(y, 0, 0) \delta_k^{-5} l_k^2 \sim -\frac{3}{16} \beta(y, 0, 0) k^{1/4} \quad \text{pour} \quad y \in Y.$$

Remarquons que de même, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$,

$$| \partial^\alpha I_k(y) | \leqslant C_\alpha k^{1/4}.$$

Nous posons alors, pour k_0 assez grand, $\gamma_k(y) = -\sum\limits_{j=k_0}^{k-1} I_j(y)$; nous avons :

$$\gamma_k(y) \sim \frac{3}{20}\beta(y, 0, 0)k^{5/4} = \frac{3}{20}\beta(y, 0, 0)\delta_k^{-5/3}, \quad \text{et}$$

$$|\partial^\alpha \gamma_k(y)| \leqslant C_\alpha \delta_k^{-5/3} \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbf{N}^{n-1},$$

et il existe donc une fonction $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ telle que pour tout $k \geqslant k_0$, $\gamma_k(y) = \delta_k^{-5/3}\gamma(y, \delta_k)$ et que $\gamma(y, 0) = \frac{3}{20}\beta(y, 0, 0) > 0$ pour $y \in Y$.

2. *Construction des suites f_k et g_k.* Comme $\delta_k^{-2} l_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, la fonction w fournie par la proposition 2.3 vérifie

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} |w_k(y, t) - 1|\right) = 0; \tag{2.7}$$

nous utiliserons donc la détermination principale du logarithme de w, qui possède les mêmes propriétés de régularité que w; nous posons

$$f_k = \operatorname{Re}\operatorname{Log} w_k - \operatorname{Re}\operatorname{Log} w_{k+1} + \gamma_k - \gamma_{k+1} + \operatorname{Re}\varphi_k - \operatorname{Re}\varphi_{k+1}$$
$$g_k = \operatorname{Im}\operatorname{Log} w_k - \operatorname{Im}\operatorname{Log} w_{k+1} + \operatorname{Im}\varphi_k - \operatorname{Im}\varphi_{k+1}.$$

Nous avons donc (cf. (2.3)) $h_k/h_{k+1} = \exp[f_k + ig_k]$, et grâce au choix de γ et à (2.7) nous obtenons la première moitié de (2.4) soit $\lim_{k\to\infty}\left(\sup_Y |f_k(y, m_k)|\right) = 0$. De plus, il est facile de vérifier (2.5) sur les formules ci-dessus définissant f_k et g_k.

3. *Construction de la suite e_k.* Compte tenu de ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à montrer la minoration de $\partial_t f_k$ (deuxième moitié de (2.4)) et (2.6). Mais (2.6) découle de (2.4) parce que $|h_{k+1}(y, t)| = |h_k(y, t)|$ équivaut à $f_k(y, t) = 0$ et que $k^2 l_k\left(\sim \frac{3}{4}k^{1/4}\right)$ tend vers l'infini avec k.

En reprenant l'expression de f_k ci-dessus, calculons-en la dérivée par rapport à t

$$\partial_t f_k = \delta_k^{-2}\operatorname{Re}(\partial_s w_k/w_k) - \delta_{k+1}^{-2}\operatorname{Re}(\partial_s w_{k+1}/w_{k+1}) + \partial_t \operatorname{Re}\varphi_k - \partial_t \operatorname{Re}\varphi_{k+1}.$$

Les deux premiers termes sont $O(\delta_k^{-2})$ lorsque k tend vers l'infini (cf. (2.7)); pour estimer les deux autres, on écrit, grâce à (2.1)

$$\begin{aligned}\delta^{1-k_1-k_2}\partial_t \operatorname{Re}\varphi(y, t, \delta) &= -2(t-\delta)\beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\quad - \delta^{-1}(t-\delta)^2\partial_\sigma\beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) \\ &\leqslant -\beta_0(t-\delta)\end{aligned}$$

pourvu que $|y - y_0|$, $\delta^{-2}(t-\delta)$ et δ soient suffisamment petits. On obtient donc

$$\begin{aligned}\partial_t f_k(y, t) &\geqslant \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - t) + \beta_0 \delta_{k+1}^{-5}(t - \delta_{k+1}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geqslant \beta_0 \delta_k^{-5}(\delta_k - \delta_{k+1}) + \beta_0(t - \delta_{k+1})(\delta_{k+1}^{-5} - \delta_k^{-5}) + O(\delta_k^{-2}) \\ &\geqslant \beta_0 \delta_k^{-5} l_k + O(\delta_k^{-5} l_k k^{-1}) + O(\delta_k^{-2}) \quad (\text{pour } k \to \infty).\end{aligned}$$

Enfin, $\delta_k^{-5} l_k \sim \frac{3}{4} k^2$ et $\delta_k^{-2} = k^{3/2}$, d'où (2.4) puis (2.6).

Maintenant que nous avons circonscrit le lieu où u s'annule (par (2.6)), il faut nous assurer que $(L+c_0)u$ s'annule suffisamment en ce même lieu pour que $(L+c_0)u/u$ soit régulière. Pour cela, nous devons modifier les fonctions h_k.

PROPOSITION 2.5. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* Y *de* y_0, *un entier* k_0 *et trois suites de fonctions* $u_k \in C^\infty(Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[)$ *à valeurs complexes et* F_k *et* $G_k \in C^\infty(Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[)$ *à valeurs réelles tels que si l'on pose*

$$\begin{aligned} r_k(y, t) &= (L+c_0)u_k(y, t)/u_k(y, t) \\ v_k(y, t) &= u_k(y, t)/u_{k+1}(y, t)\end{aligned}$$

on ait $v_k = \exp[F_k + iG_k]$, *et* r_k, F_k *et* G_k *possèdent les propriétés suivantes pour* $k \geqslant k_0$:

$$(2.8) \quad \begin{cases} r_k(y, t) \text{ et } r_{k+1}(y, t) \text{ sont « plates » sur } t = m_k + e_k(y) \\ \text{(ce qui signifie que toutes leurs dérivées s'y annulent);} \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ et tout } \nu \in \mathbf{N}, \\ \lim\limits_{k \to \infty} \left(\sup\limits_{Y \times]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} |k^\nu \partial^\alpha r_k(y, t)| \right) = 0; \end{cases}$$

$$(2.10) \quad \begin{cases} F_k(y, m_k + e_k(y)) = 0 \\ \text{et } \partial_t F_k(y, t) \geqslant \dfrac{\beta_0 k^2}{3} \text{ sur } Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[; \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \begin{cases} \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n, \text{ il existe } C_\alpha \text{ et } \nu_\alpha \in \mathbf{N} \text{ tels que sur} \\ Y \times]\delta_{k+1}, \delta_k[, |\partial^\alpha F_k(y, t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha} \text{ et } |\partial^\alpha G_k(y, t)| \leqslant C_\alpha k^{\nu_\alpha}. \end{cases}$$

Démonstration: en deux parties.

1. *Construction de la suite* u_k. Nous choisissons les fonctions $u_k(y, t)$ par la formule $u_k = h_k(1+\varepsilon_k)$ avec

$$\varepsilon_k(y, t) = \varepsilon(y, l_k^{-1}(t-\delta_k), \delta_k)$$

où la fonction $\varepsilon(y, \tau, \delta)$ est à choisir. Pour obtenir (2.8), il faudra que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$,

$$\partial^\alpha[(L+c_0)h_k/h_k] + \partial^\alpha[L\varepsilon_k/(1+\varepsilon_k)] = 0$$

sur $t = m_k + e_k(y)$ et sur $t = m_{k-1} + e_{k-1}(y)$. Si nous demandons de plus à la fonction ε de s'annuler sur les fermés Φ_k et Ψ_k définis ci-dessous, ces conditions sont encore équivalentes à la suite d'équations suivante:

$$(2.12)\quad \begin{cases} \text{pour tout } j \geqslant 1 \text{ et tout } k \geqslant k_0, \\ \qquad \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \varphi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Phi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)\}, \\ \qquad \partial_\tau^j \varepsilon(y, \tau, \delta) = \psi_{j,k}(y) \text{ sur} \\ \Psi_k = \{(y, \tau, \delta) \mid y \in \bar{Y}, \delta = \delta_k \text{ et } \tau = l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k)\}, \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi_{j,k}(y)$ et $\psi_{j,k}(y)$ s'expriment en fonction des dérivées de $(L+c_0)h_k/h_k$ et sont donc à décroissance rapide en k ainsi que toutes leurs dérivées grâce à (2.2). Nous demanderons aussi à la fonction ε de vérifier

$$(2.13)\quad \begin{cases} \text{pour tout } l > 0 \text{ et tout } j \geqslant 0, \text{ ainsi que pour } j = l = 0, \\ \text{et pour tout } k \geqslant k_0, \partial_\tau^j \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, \delta) = 0 \text{ sur } \Phi_k \text{ et } \Psi_k, \text{ et} \end{cases}$$

$$(2.14)\qquad \partial_\delta^l \varepsilon(y, \tau, 0) = 0 \quad \text{pour tout} \quad l \geqslant 0.$$

Il existe une fonction $\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ vérifiant (2.12), (2.13) et (2.14): elle nous est fournie par le théorème d'extension de Whitney [26] appliqué au fermé

$$\{(y, \tau, \delta) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \delta = 0\} \cup \left(\bigcup_{k \geqslant k_0} \Phi_k\right) \cup \left(\bigcup_{k \geqslant k_0} \Psi_k\right).$$

Les conditions de compatibilité requises pour pouvoir utiliser ce théorème sont trivialement vérifiées puisque les fonctions $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ sont à décroissance rapide en k ainsi que leurs dérivées, et que $l_k^{-1}(m_k + e_k(y) - \delta_k)$ $= -\dfrac{2}{3} + O(k^{-1})$ et $l_k^{-1}(m_{k-1} + e_{k-1}(y) - \delta_k) = \dfrac{1}{3} + O(k^{-1})$ (pour $k \to \infty$).

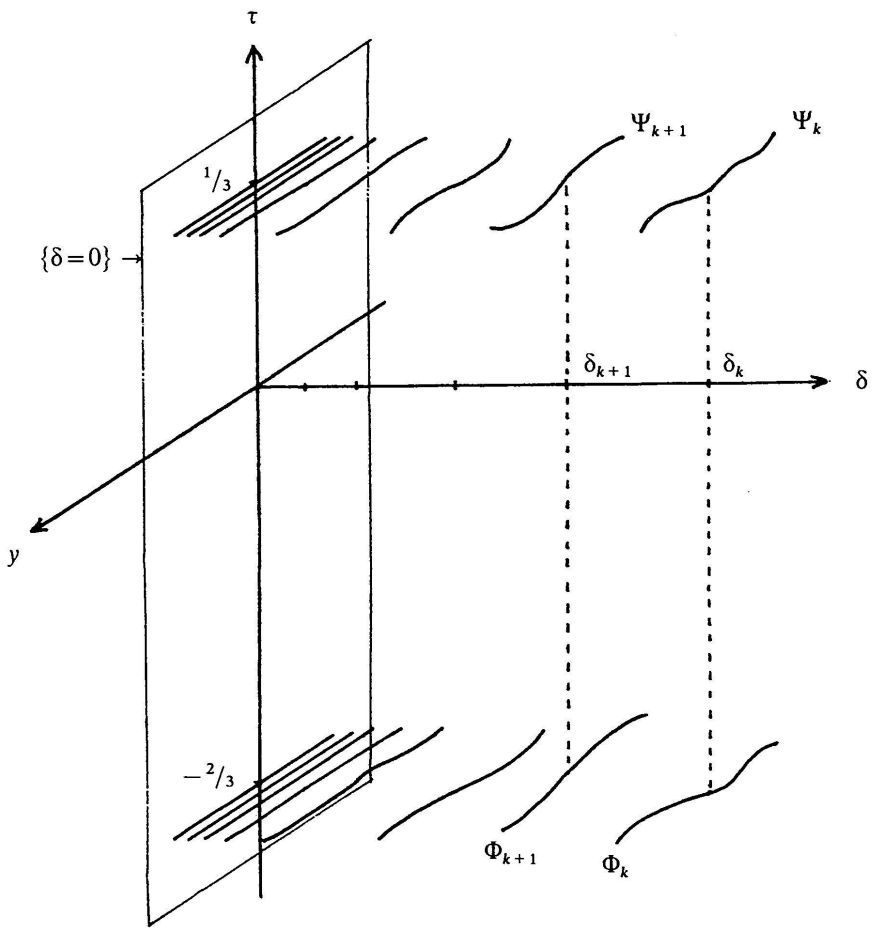

FIGURE 2.1.
Le fermé auquel on applique le théorème de Whitney.

2. *Construction des suites F_k et G_k.* Les équations (2.12) ont été choisies pour que r_k et r_{k+1} soient plates sur $t = m_k + e_k(y)$: la propriété (2.8) est donc acquise. De la condition (2.14) nous tirons que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et tout $\nu \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{Y\times]\delta_{k+1},\delta_{k-1}[} |\, k^\nu \partial^\alpha \varepsilon_k \,|\right) = 0\,, \tag{2.15}$$

et par conséquent, on obtient (2.9) en utilisant (2.2) et la formule

$$\partial^\alpha r_k = \partial^\alpha\big[(L+c_0)h_k/h_k\big] + \partial^\alpha\big[L\varepsilon_k/(1+\varepsilon_k)\big]\,.$$

L'estimation (2.15) permet aussi d'utiliser la détermination principale du logarithme de $1+\varepsilon$; nous posons donc:

$$F_k = f_k + \operatorname{Re}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_k) - \operatorname{Re}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_{k+1})$$
$$G_k = g_k + \operatorname{Im}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_k) - \operatorname{Im}\operatorname{Log}(1+\varepsilon_{k+1})\,.$$

Nous avons alors $v_k = \exp[F_k + iG_k]$, et F_k et G_k vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) ($j=l=0$) et (2.15).

2.4. Construction des fonctions u et a

Par un calcul élémentaire nous voyons que pour $y \in Y$ et k assez grand, $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4} l_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4} l_{k+1} < \delta_k$. Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\chi(\tau) = 1 \quad \text{pour} \quad \tau \in [-3/4, 3/4],$$
$$\operatorname{supp} \chi \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad \chi(\tau) \in [0, 1] \quad \text{pour} \quad \tau \in [-1, 1];$$

puis avec $\chi_k(t) = \chi(l_k^{-1}(t-\delta_k))$ nous posons

$$\begin{cases} u(y,t) = \sum_{k \geqslant k_0} \chi_k(t) u_k(y,t) & \text{pour} \quad (y,t) \in Y \times]0, \delta_{k_0}[, \\ u(y,t) = 0 & \text{pour} \quad (y,t) \in Y \times]-\delta_{k_0}, 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(y,t) = -(L+c_0)u(y,t)/u(y,t) & \text{pour} \quad u(y,t) \neq 0, \\ a(y,t) = 0 & \text{pour} \quad u(y,t) = 0. \end{cases}$$

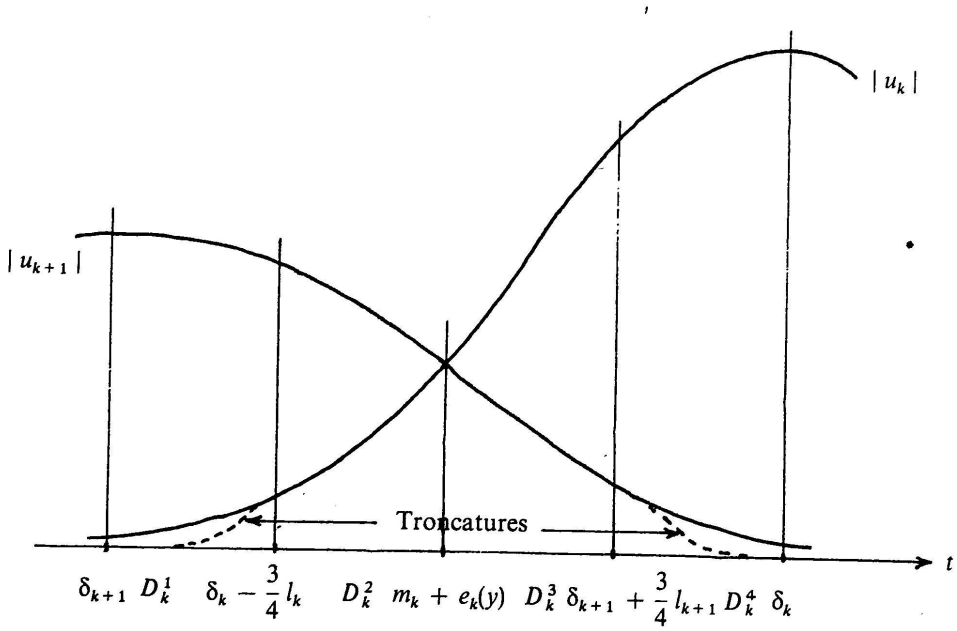

Figure 2.2.
Profils des fonctions u_k et u_{k+1} pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$.