**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 32 (1986)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

**Autor:** Raymond, Xavier Saint

**Kapitel:** 3.1. Le problème elliptique

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-55077

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Pour démontrer le théorème 1.2, nous suivrons le schéma proposé par Strauss et Trèves [24] sauf au paragraphe 3.2 où nous nous inspirons de Zuily [28]. Il faut dans la démonstration distinguer les étapes suivantes: tout d'abord une étape purement locale où nous établissons un lemme technique copié sur le cas elliptique (3.2); puis nous effectuons par deux fois un passage du local au global afin d'obtenir le théorème 1.2 sous la condition $(R)$ d'abord dans $\mathbf{R}^2$ (3.3), puis dans $\mathbf{R}^n$ (3.4); enfin, c'est de nouveau en « globalisant » le résultat donné par le lemme du paragraphe 3.2 que nous obtenons le théorème 1.2 sous la condition $(P)$ (3.5).

## 3.1. Le problème elliptique

Un champ $L$ de $\mathbf{R}^2$ est dit elliptique en $x_0$ si les champs réels $X = \operatorname{Re} L$ et $Y = \operatorname{Im} L$ sont linéairement indépendants en $x_0$. Pour toute fonction $\varphi$ telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$, le problème associé à un champ elliptique est non caractéristique. Le champ $L$ sera dit elliptique dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{R}^2$ s'il est elliptique en chacun de ses points.

Théorème 3.1. *Soit $L$ un champ elliptique en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$. Alors, pour tout voisinage $\omega$ de $x_0$ et toute $u \in C^1(\omega)$ solution du système*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

*la fonction $u$ s'annule au voisinage de $x_0$.*

*Démonstration.* Posons

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) + |x - x_0|^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = -(\psi(x) - \varepsilon_0)^2$$

pour un $\varepsilon_0 > 0$ que nous choisirons ultérieurement. Remarquons que pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leqslant \varepsilon\}$ est un compact tel que $x_0$ soit un point intérieur de $K_\varepsilon \cup \omega_-$.

Le point clé de la démonstration, que nous établirons plus loin, est l'obtention de l'inégalité suivante (dite inégalité de Carleman): il existe des constantes $\tau_0 < \infty$ et $C < \infty$, et un opérateur $R$ (du premier ordre) tels que $\forall v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, $\forall \tau \geqslant \tau_0$,

$$(3.2) \qquad \int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leqslant C \int e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| (|Rv| + |v|).$$

Montrons pour le moment comment obtenir l'unicité à partir d'une telle inégalité. Des valeurs $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ étant fixées de telle manière que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, nous choisissons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $\chi = 1$ sur $K_{\varepsilon_1}$ et $\operatorname{supp} \chi \cap \omega_+ \subset K_{\varepsilon_0}$:

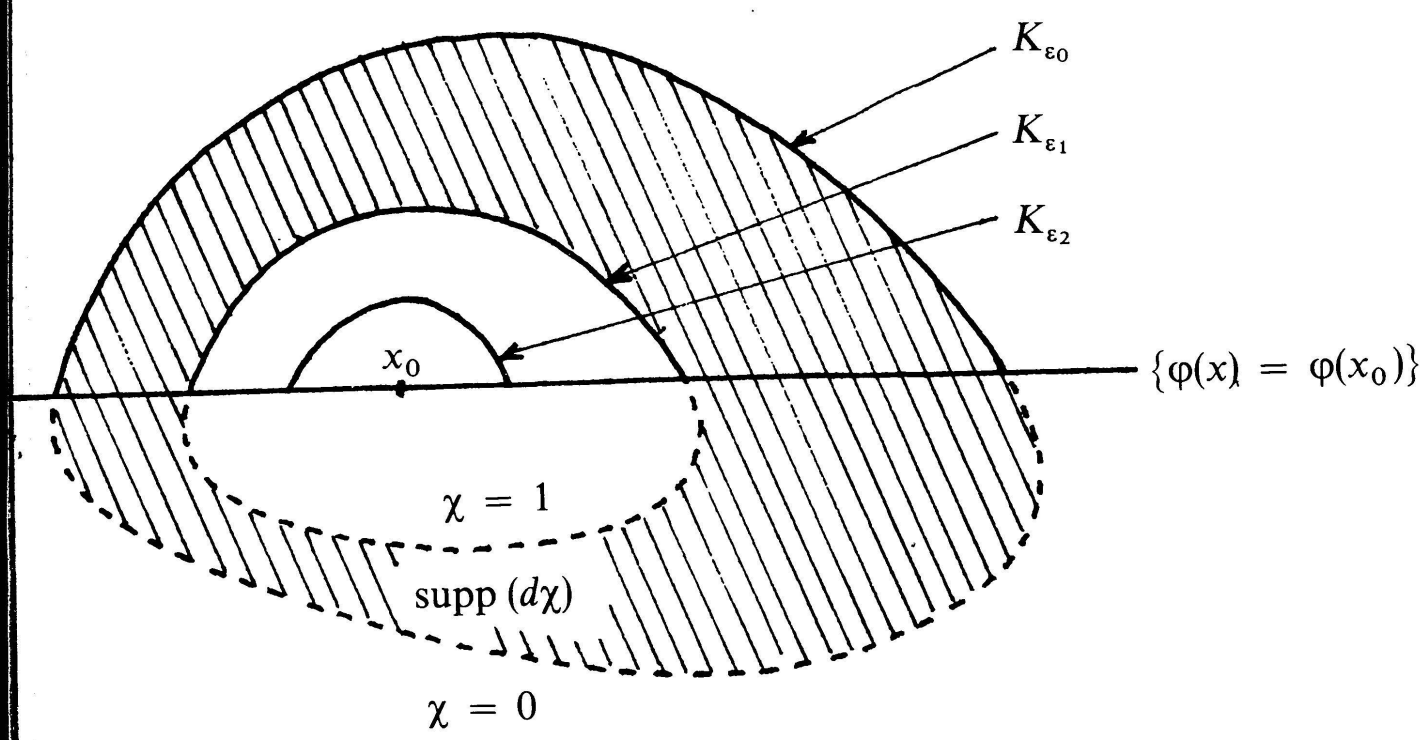


FIGURE 3.1.
Le support de $\chi$ et les compacts $K_{\varepsilon_0}$, $K_{\varepsilon_1}$ et $K_{\varepsilon_2}$.

Soit $u$ une solution du système (3.1); formons $v = \chi u$ le produit de $u$ par $\chi$: $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ et $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, donc on peut appliquer l'inégalité (3.2) à $v$. Mais d'une part

$$e^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |u|^2$$
$$= \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leqslant \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2,$$

et d'autre part, $(L+c_0)v = \chi(L+c_0)u + [L, \chi]u = (L\chi)u = 0$ sur $K_{\varepsilon_1}$, d'où

$$\int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| (|Rv|+|v|) = \int_{K_{\varepsilon_0}\setminus K_{\varepsilon_1}} e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| (|Rv|+|v|)$$
$$\leqslant e^{2\tau(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v| (|Rv|+|v|).$$

L'inégalité (3.2) donne donc pour $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leqslant Ce^{2\tau(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L+c_0)v|\,(|Rv|+|v|),$$

et comme $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(2\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2) < 0$, il suffit de laisser $\tau$ tendre vers l'infini pour savoir que $u = 0$ dans $K_{\varepsilon_2}$ donc au voisinage de $x_0$.

*Démonstration de l'inégalité (3.2).* Comme $d\psi(x_0) = d\varphi(x_0) \neq 0$ et que $L$ est elliptique en $x_0$, le problème (avec $\psi$) est non caractéristique et nous pouvons d'après le lemme 1.3 trouver des coordonnées $(y, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ telles que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\psi(x) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Comme $L$ est elliptique en $x_0$, nous supposerons que $b(0, 0) > 0$ (sinon, changer $y$ en $-y$), et prendrons $\varepsilon_0$ suffisamment petit pour que $b \geqslant \delta > 0$ dans $K_{\varepsilon_0}$.

En vue d'écrire $w = e^{-\tau\Psi}v$, posons $L_\tau = e^{-\tau\Psi}(L+c_0)e^{\tau\Psi}$, et $c = c_1 + ic_2$ où $c_1$ et $c_2$ sont à valeurs réelles; d'après les points 2 et 3 ci-dessus, on calcule que:

$$L_\tau = \partial_t - 2\tau(t-\varepsilon_0) + ib\,\partial_y + c_1 + ic_2 = M + iN \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} M = \partial_t + ic_2 \\ N = b\,\partial_y + i(2\tau(t-\varepsilon_0)-c_1). \end{cases}$$

Dans le découpage ci-dessus, nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe pour pouvoir effectuer des intégrations par parties. En effet, pour $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $w \subset K_{\varepsilon_0}$,

$$\operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} L_\tau w\overline{Nw} = \operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} Mw\overline{Nw} + \int \frac{|Nw|^2}{b} \geqslant \operatorname{Re}\int \frac{1}{ib} Mw\overline{Nw}$$

puisque $b > 0$ dans $K_{\varepsilon_0}$; puis

$$2\operatorname{Re}\int Mw(\overline{Nw}/ib) = \int |w|^2\partial_t[(2\tau(t-\varepsilon_0)-c_1)/b] - \int |w|^2\partial_y c_2$$

par intégrations par parties. On obtient donc:

$$\int |w|^2(2\tau[(b-(t-\varepsilon_0)\partial_t b)/b^2] - [\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)])$$

$$\leqslant 2\,\mathrm{Re}\int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} \leqslant 2\int |L_\tau w|\,|Nw/b|\,.$$

Choisissons donc $\varepsilon_0$ assez petit pour que $|(t-\varepsilon_0)\partial_t b| \leqslant \delta/2$ dans $K_{\varepsilon_0}$, puis $\tau_0$ suffisamment grand pour que $|\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)| \leqslant \delta\tau_0/(2 \sup_{K_{\varepsilon_0}} b^2)$ dans $K_{\varepsilon_0}$; alors, pour $\tau \geqslant \tau_0$ et $C_0 = 4 \sup b^2/\delta$,

$$\frac{\tau}{C_0}\int |w|^2 \leqslant \int |L_\tau w|\,|Nw/b|\,.$$

Enfin, pour $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$, posons $w = e^{-\tau\Psi}v$, et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\Psi}|v|^2 \leqslant \frac{C_0}{\tau}\int e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|\,|(\partial_y - ic_1/b)v|$$

$$+ C_0\int e^{-2\tau\Psi}|(L+c_0)v|\,|2(t-\varepsilon_0)v/b|$$

d'où l'inégalité (3.2) si nous posons

$$R = \partial_y - ic_1/b \quad \text{et} \quad C = \max\{C_0/\tau_0, C_0 \sup|2(t-\varepsilon_0)/b|\}\,.$$

*Remarques.* Il existe pour les champs elliptiques des inégalités de Carleman meilleures que l'inégalité (3.2); nous avons fait ce choix parce que ce résultat s'étend à des champs non elliptiques comme nous le verrons plus loin. L'introduction du facteur $1/b$ dans les intégrales a pour but de remplacer $\int b\partial_t w\partial_y \bar{w}$ qui nécessite des calculs pour être estimée, par $\int \partial_t w\partial_y \bar{w}$ dont la partie imaginaire est nulle; c'est là que nous utilisons l'ellipticité de $L$. Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer qu'un tel calcul est encore possible sous des hypothèses plus faibles sur $L$. Avant cela, donnons un corollaire du théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.2. *Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbf{R}^2$ dans lequel le champ $L$ est elliptique. Si $u \in C^1(\Omega)$ vérifie $(L+c_0)u(x) = 0$ dans $\Omega$ et s'annule dans un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, alors $u$ est nulle dans $\Omega$.*

*Démonstration.* Notons $F = \operatorname{supp} u$ et supposons que $F \neq \mathring{F}$.

Alors il existe $x_0 \in F\backslash\mathring{F}$. Comme $x_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte centrée en $x_0$, $B(x_0, \delta)$, qui soit contenue dans $\Omega$. Comme $x_0 \notin \mathring{F}$, il existe

un point $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$ tel que $x_1 \notin F$. Soit alors $\varepsilon = \sup\{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$; on a $0 < \varepsilon \leqslant \delta/2$ puisque $F$ est fermé et que $x_0 \in F$, donc $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$. De plus, par compacité il existe $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$.

Soit $\varphi(x) = |x - x_1|^2$; alors $u$ est nulle dans $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leqslant \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ puisque $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ par définition de $\varepsilon$; or le problème est elliptique en $x_2$ et $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$, donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de $x_2$, ce qui contredit le fait que $x_2 \in F = \operatorname{supp} u$.

Cette contradiction prouve que le support de $u$ est à la fois ouvert et fermé. Mais $\operatorname{supp} u \neq \Omega$ puisque $\omega \neq \emptyset$ est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme $\Omega$ est connexe, c'est que $\operatorname{supp} u = \emptyset$.

## 3.2. Un lemme technique

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans $\mathbf{R}^2$ copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

Lemme 3.3. *Soient* $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et* $b : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *deux fonctions* $C^\infty$. *Supposons qu'il existe un voisinage convexe* $\omega$ *de* $(y_0, \theta(y_0))$ *tel que* $b$ *soit positive sur* $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geqslant \theta(y)\}$ *et* $b(y_0, t_0) > 0$ *pour un* $t_0$ *tel que* $(y_0, t_0) \in \omega_+$. *Alors pour toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \partial_t u + ib\,\partial_y u + cu = 0 & \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u = 0 & \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leqslant \theta(y)\} \end{cases}$$

*la fonction* $u$ *s'annule au voisinage de* $(y_0, \theta(y_0))$.

*Démonstration.* Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids $\psi$ fabriqué de telle manière que l'opérateur $n = N/b$ soit encore bien défini.

Si $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$, nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposerons donc tout au long de cette démonstration que $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$. Le $t_0$ de l'hypothèse vérifie donc $t_0 > \theta(y_0)$, et il existe un voisinage de $(y_0, t_0)$ contenu dans $\omega_+$ tel que $b \geqslant \delta > 0$ dans ce voisinage (et nous supposerons $\delta \leqslant 1$ dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme