3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,v\,|^2 \leqslant \frac{8}{\tau}\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\;|\,\partial_y v + c_1 v\,|$$

$$+\,8\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\;|\,(\partial_y\psi + i(t_0+\alpha-t))v\,|\,.$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $v \subset K_{\varepsilon_0}$ et tout $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int e^{-2\tau\psi}\,|\,v\,|^2 \leqslant C\int e^{-2\tau\psi}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\,\big(|\partial_y v + c_1 v| + |v|\big)\,. \tag{3.5}$$

3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est $\mathbf{R}^2$.

Théorème 3.4. *Supposons que* $\mathrm{rg}\,\mathscr{L}(x_0) = 2$ *en un point* $x_0 \in \mathbf{R}^2$. *Si le problème est non caractéristique (en* x_0*), alors pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur $\mathbf{R}^2$ des coordonnées (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0, 0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse $\mathrm{rg}\,\mathscr{L}(x_0) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $\partial_t^k\, b(0, 0) \neq 0$ tandis que $\partial_t^j\, b(0, 0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y, t) \in\,]-Y, Y[\,\times\,]-T, T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t)\,\big(t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \ldots + a_0(y)\big)$$

avec $a, a_0, ..., a_{k-1}$ des fonctions C^∞ à valeurs réelles telles que $a(y, t) \neq 0$ dans $]-Y, Y[\times]-T, T[$, et $a_j(0) = 0$ pour $j = 0, ..., k-1$. Nous allons maintenant découper le domaine $]-Y, Y[\times]-T, T[$ en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3; ce découpage nous est donné par le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints* $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *dont la réunion est dense dans* $]-Y, Y[$, *et pour chaque* $i \in \mathbf{N}$, *un nombre fini de fonctions* C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ *tels que pour tout* $y \in I_i$:

1. $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$,
2. $b(y, t) = 0 \Leftrightarrow \exists j$ *tel que* $t = \theta_{i,j}(y)$.

Démonstration du lemme. Avec les notations précédentes, posons

$$P(y, t) = t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + ... + a_0(y)$$

qui est un polynôme en t à coefficients réels et réguliers en y.

Soit $\mathcal{O}_k$ l'ouvert de $]-Y, Y[$ tel que $P(y, t)$ possède k racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_k$; notons $\mathcal{O}'_k$ l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_k$ dans $]-Y, Y[$. Si $\mathcal{O}'_k$ est vide, c'est que $\mathcal{O}_k$ est dense dans $]-Y, Y[$ et nous arrêtons là notre construction; sinon $P(y, t)$ possède au plus $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}'_k$. Nous définissons alors $\mathcal{O}_{k-1}$ comme l'ouvert de $\mathcal{O}'_k$ tel que $P(y, t)$ possède exactement $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_{k-1}$, puis $\mathcal{O}'_{k-1}$ comme l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_{k-1}$ dans $\mathcal{O}'_k$. Et ainsi de suite; l'ouvert $\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{O}_j$ est alors dense dans $]-Y, Y[$. Nous appelons $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ les composantes connexes des ouverts $\mathcal{O}_j$.

Dans chaque intervalle I_i, les racines en t de $P(y, t)$ sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions C^∞ de y; de plus, P étant à coefficients réels, θ est racine si et seulement si $\bar{\theta}$ est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand y décrit I_i. Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ vérifiant 1. et 2.

Démonstration du théorème 3.4 (fin). Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de $]-Y, Y[\times]0, T[$; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il

existe un point $(y_0, t_0) \in \operatorname{supp} u$ avec $y_0 \in I_i$ pour un $i \in \mathbf{N}$. L'intervalle I_i étant ouvert, il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset I_i$.

Posons $\psi(y, t) = t + t_0(y - y_0)^2\varepsilon^{-2}$ et considérons les paraboles P_τ d'équations $\psi(y, t) = \tau$. La fonction u est nulle en dessous de la parabole P_0 puisque $P_0 \subset \{t \leqslant 0\}$, mais P_{t_0} coupe le support de u et $P_{t_0} \cap \{t \geqslant 0\} \subset I_i \times [0, T[$. Par compacité, il existe donc un point $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u \cap (I_i \times [0, T[)$ tel que $u = 0$ dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) \leqslant \psi(y_1, t_1)\}$. Nous distinguerons alors deux cas:

1. Si $b(y_1, t_1) \neq 0$, le problème est elliptique en (y_1, t_1) et $d\psi(y_1, t_1) \neq 0$; donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1) ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.

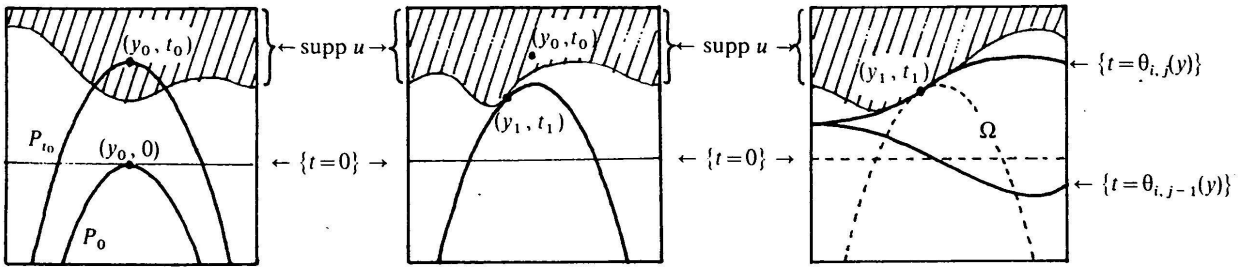
2. Si $b(y_1, t_1) = 0$, par le lemme 3.5 il existe j tel que $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$. En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

α. $\Omega = \{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$ est un ouvert connexe;

β. b ne s'annule pas dans Ω, donc L est elliptique dans Ω.

Comme u s'annule dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) < \psi(y_1, t_1)\}$, elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec Ω, qui est une partie ouverte non vide de Ω. Par le corollaire 3.2, u est nulle dans Ω.

De même, la fonction b ne s'annule pas dans $\{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$, et on peut donc supposer, quitte à changer y en $-y$, que b est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe w de (y_1, t_1) tel que b soit positive sur $w_+ = \{(y, t) \in w \mid t \geqslant \theta_{i,j}(y)\}$, strictement positive en un point $(y_1, t_2) \in w_+$, et tel que $u = 0$ dans $w_- = \{(y, t) \in w \mid t \leqslant \theta_{i,j}(y)\}$. Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point (y_1, t_1): nous obtenons $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1), ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.



Les paraboles P_0 et P_{t_0}. Cas 1. Cas 2.

FIGURE 3.2.
Les paraboles P_τ.