Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,v\,|^2 \leqslant \frac{8}{\tau}\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\;|\,\partial_y v + c_1 v\,|$$

$$+\,8\int e^{-2\tau\psi}\, e^{2\,\mathrm{Re}\int c}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\;|\,(\partial_y\psi + i(t_0+\alpha-t))v\,|\,.$$

Il existe donc une constante C telle que pour toute $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$ avec supp $v \subset K_{\varepsilon_0}$ et tout $\tau \geqslant \tau_0$,

$$\int e^{-2\tau\psi}\,|\,v\,|^2 \leqslant C\int e^{-2\tau\psi}\,|\,\partial_t v + ib\partial_y v + cv\,|\,\big(|\partial_y v + c_1 v| + |v|\big)\,. \tag{3.5}$$

3.3. Unicité en dimension deux sous la condition (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est $\mathbf{R}^2$.

Théorème 3.4. *Supposons que* $\mathrm{rg}\,\mathscr{L}(x_0) = 2$ *en un point* $x_0 \in \mathbf{R}^2$. *Si le problème est non caractéristique (en* x_0*), alors pour tout voisinage* ω *de* x_0 *et toute* $u \in C^1(\omega)$ *solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} (L+c_0)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \quad \textit{et} \\ u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}\,, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

la fonction u *s'annule au voisinage de* x_0.

Démonstration. D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur $\mathbf{R}^2$ des coordonnées (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

Si $b(0, 0) \neq 0$, nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse $\mathrm{rg}\,\mathscr{L}(x_0) = 2$, il existe $k > 0$ tel que $\partial_t^k\, b(0, 0) \neq 0$ tandis que $\partial_t^j\, b(0, 0) = 0$ pour $j < k$. Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour $(y, t) \in\,]-Y, Y[\,\times\,]-T, T[$ avec $Y > 0$ et $T > 0$, une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t)\,\big(t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \ldots + a_0(y)\big)$$

avec $a, a_0, ..., a_{k-1}$ des fonctions C^∞ à valeurs réelles telles que $a(y, t) \neq 0$ dans $]-Y, Y[\times]-T, T[$, et $a_j(0) = 0$ pour $j = 0, ..., k-1$. Nous allons maintenant découper le domaine $]-Y, Y[\times]-T, T[$ en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3; ce découpage nous est donné par le lemme suivant:

LEMME 3.5. *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints* $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *dont la réunion est dense dans* $]-Y, Y[$, *et pour chaque* $i \in \mathbf{N}$, *un nombre fini de fonctions* C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ *tels que pour tout* $y \in I_i$:

1. $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$,
2. $b(y, t) = 0 \Leftrightarrow \exists j$ *tel que* $t = \theta_{i,j}(y)$.

Démonstration du lemme. Avec les notations précédentes, posons

$$P(y, t) = t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + ... + a_0(y)$$

qui est un polynôme en t à coefficients réels et réguliers en y.

Soit $\mathcal{O}_k$ l'ouvert de $]-Y, Y[$ tel que $P(y, t)$ possède k racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_k$; notons $\mathcal{O}'_k$ l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_k$ dans $]-Y, Y[$. Si $\mathcal{O}'_k$ est vide, c'est que $\mathcal{O}_k$ est dense dans $]-Y, Y[$ et nous arrêtons là notre construction; sinon $P(y, t)$ possède au plus $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}'_k$. Nous définissons alors $\mathcal{O}_{k-1}$ comme l'ouvert de $\mathcal{O}'_k$ tel que $P(y, t)$ possède exactement $k-1$ racines complexes distinctes en t pour $y \in \mathcal{O}_{k-1}$, puis $\mathcal{O}'_{k-1}$ comme l'intérieur du complémentaire de $\mathcal{O}_{k-1}$ dans $\mathcal{O}'_k$. Et ainsi de suite; l'ouvert $\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{O}_j$ est alors dense dans $]-Y, Y[$. Nous appelons $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ les composantes connexes des ouverts $\mathcal{O}_j$.

Dans chaque intervalle I_i, les racines en t de $P(y, t)$ sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions C^∞ de y; de plus, P étant à coefficients réels, θ est racine si et seulement si $\bar{\theta}$ est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand y décrit I_i. Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions C^∞ $\theta_{i,j}: I_i \to \mathbf{R}$ vérifiant 1. et 2.

Démonstration du théorème 3.4 (fin). Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de $]-Y, Y[\times]0, T[$; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il

existe un point $(y_0, t_0) \in \operatorname{supp} u$ avec $y_0 \in I_i$ pour un $i \in \mathbf{N}$. L'intervalle I_i étant ouvert, il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset I_i$.

Posons $\psi(y, t) = t + t_0(y - y_0)^2\varepsilon^{-2}$ et considérons les paraboles P_τ d'équations $\psi(y, t) = \tau$. La fonction u est nulle en dessous de la parabole P_0 puisque $P_0 \subset \{t \leqslant 0\}$, mais P_{t_0} coupe le support de u et $P_{t_0} \cap \{t \geqslant 0\} \subset I_i \times [0, T[$. Par compacité, il existe donc un point $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u \cap (I_i \times [0, T[)$ tel que $u = 0$ dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) \leqslant \psi(y_1, t_1)\}$. Nous distinguerons alors deux cas:

1. Si $b(y_1, t_1) \neq 0$, le problème est elliptique en (y_1, t_1) et $d\psi(y_1, t_1) \neq 0$; donc par le théorème 3.1, $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1) ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.

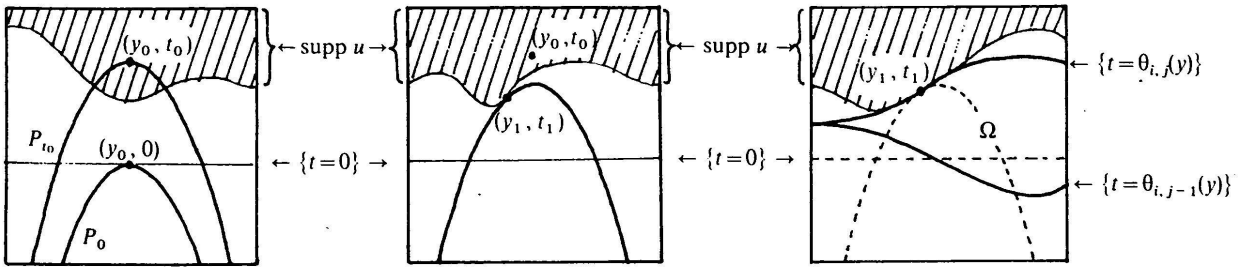
2. Si $b(y_1, t_1) = 0$, par le lemme 3.5 il existe j tel que $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$. En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

α. $\Omega = \{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$ est un ouvert connexe;

β. b ne s'annule pas dans Ω, donc L est elliptique dans Ω.

Comme u s'annule dans $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) < \psi(y_1, t_1)\}$, elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec Ω, qui est une partie ouverte non vide de Ω. Par le corollaire 3.2, u est nulle dans Ω.

De même, la fonction b ne s'annule pas dans $\{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$, et on peut donc supposer, quitte à changer y en $-y$, que b est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe w de (y_1, t_1) tel que b soit positive sur $w_+ = \{(y, t) \in w \mid t \geqslant \theta_{i,j}(y)\}$, strictement positive en un point $(y_1, t_2) \in w_+$, et tel que $u = 0$ dans $w_- = \{(y, t) \in w \mid t \leqslant \theta_{i,j}(y)\}$. Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point (y_1, t_1): nous obtenons $u = 0$ au voisinage de (y_1, t_1), ce qui contredit le fait que $(y_1, t_1) \in \operatorname{supp} u$.



Les paraboles P_0 et P_{t_0}. Cas 1. Cas 2.

FIGURE 3.2.
Les paraboles P_τ.