Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: 3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (R)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3.4. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (R)

Dans ce paragraphe, l'espace est $\mathbf{R}^n$, n entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R); le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales (y, t) telles que:

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert ω avec le domaine dans lequel la propriété (R) est vérifiée contient un voisinage de $(0, 0)$ de la forme $v \times]-T, T[$ où $T > 0$ et v est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ suffisamment petit pour que $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ sur $S = \{(y, 0) \in \mathbf{R}^n \mid y \in v\}$. On a $\operatorname{rg} \mathscr{L} \geqslant 1$ sur S puisque $\partial_t \in \mathscr{L}$, ce qui entraîne encore que:

1. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(y_0, 0) = 1$, la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$ est $\{y_0\} \times]-T, T[$.

2. Pour un point $(y_0, 0) \in S$ tel que $\operatorname{rg} \mathscr{L}(y_0, 0) = 2$, si la courbe $\gamma \subset S$ est la trace sur S de la variété intégrale passant par $(y_0, 0)$, cette dernière est $\gamma \times]-T, T[$.

Comme la réunion des traces sur S des variétés intégrales de $\mathscr{L}$ est égale à S par la propriété (R), la réunion des variétés intégrales de $\mathscr{L}$ coupant S est égale au voisinage $v \times]-T, T[$ tout entier.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Ce point (y_0, t_0) est donc situé sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ coupant S. Si (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]-T, T[$, et u vérifie donc l'équation

$$\partial_t u(y_0, t) + c(y_0, t)\, u(y_0, t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in]-T, T[$$

où y_0 n'est plus qu'un paramètre; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que $u(y_0, t) = 0$ pour $t \in]0, T[$, ce qui contredit le fait que $u(y_0, t_0) \neq 0$.

Il s'ensuit donc que (y_0, t_0) est sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2 que nous noterons $\mathscr{V}$. Utilisons (z, t) comme coordonnées sur $\mathscr{V}$ où z est l'abscisse curviligne sur $\mathscr{V} \cap S$, et désignons par z_0 l'abscisse du point (y_0, t_0) dans les coordonnées (z, t). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \times]-T, T[$ soit contenu dans $\mathscr{V}$. Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2\, \varepsilon^{-2}$ et intro-

duisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$ tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\operatorname{rg} \mathscr{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur $\mathscr{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$.

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / | b(y, t_1) |$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ.

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = | b(y, t) | \, d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0).