3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

duisons les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_1, t_1) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$ tel que $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_1, t_1)\}$. Or le problème (pour ψ) est non caractéristique en (z_1, t_1) et $\operatorname{rg} \mathscr{L}(z_1, t_1) = 2$ puisque nous sommes sur une variété intégrale de $\mathscr{L}$ de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que u est nulle au voisinage de (z_1, t_1) sur $\mathscr{V}$, ce qui contredit le fait que (z_1, t_1) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}$.

Nous avons donc obtenu que $u = 0$ dans $v \times]-T, T[$.

3.5. Démonstration du théorème 1.2 sous la condition (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, un voisinage v de 0 dans $\mathbf{R}^{n-1}$ et un nombre $T > 0$ tels que

1. $x_0 = (0, 0)$,
2. $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$,
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ dans $v \times]-T, T[$ à un facteur non nul près,
4. $v \times]-T, T[\subset \omega \cap \Omega$.

Soit $u \in C^1(\omega)$ une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe $(y_0, t_0) \in v \times]0, T[$ tel que $u(y_0, t_0) \neq 0$. Si on avait $b(y_0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, t_0[$, l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $b(y_0, t_1) \neq 0$. Il existe aussi tout un voisinage de y_0 tel que $b(y, t_1) \neq 0$ pour y dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / | b(y, t_1) |$$

est bien défini et régulier au voisinage de y_0; par conséquent, le champ réel $d(y) \cdot \partial_y$ admet en y_0 une courbe intégrale que nous noterons γ.

Comme la condition (P) est vérifiée dans $v \times]0, T[$, nous avons $b(y, t) = | b(y, t) | \, d(y)$ pour tout $(y, t) \in \gamma \times]0, T[$, et donc le champ L est tangent à $\gamma \times]0, T[$; nous pouvons désormais nous restreindre à $\gamma \times]-T, T[$ qui contient le point (y_0, t_0) où u ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple (z, t) où z est l'abscisse curviligne sur γ associée au champ $d(y) \cdot \partial_y$; z_0 désignera l'abscisse du point (y_0, t_0).

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\gamma \times]-T, T[$ se présente de la façon suivante:

1. $\mathscr{V} =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times]-T, T[\subset\gamma\times]-T, T[$;
2. $u(z, t_0) \neq 0$ pour $z \in]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[$;
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t)\,\partial_z + c(z, t)$ dans $\mathscr{V}_+ =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times[0, T[$;
4. $b(z, t) \geqslant 0$ dans $\mathscr{V}_+$ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z, t) = t + t_0(z-z_0)^2\,\varepsilon^{-2}$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2, t_2) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$ tel que $t_2 < t_0$ et $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_2, t_2)\}$.

Comme tout à l'heure, si on avait $b(z_2, t) = 0$ pour tout $t \in]t_2, T[$, on prouverait que $u(z_2, t_0) = 0$ ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2, T[$ tel que $b(z_2, t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure:

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta(z) = t_2 + t_0\left(\dfrac{z_2-z_0}{\varepsilon}\right)^2 - t_0\left(\dfrac{z-z_0}{\varepsilon}\right)^2$ (en sorte que $t \geqslant \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geqslant \psi(z_2, t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) contenant (z_2, t_3) (où $b>0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geqslant \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leqslant \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2, t_2) ce qui contredit le fait que (z_2, t_2) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$.

2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

Chapitre 4: Etude d'un modèle dans $\mathbf{R}^2$

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits: le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans $\mathbf{R}^2$ (ce qui assure que rg $\mathscr{L} \leqslant 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.