Chapitre 4: Etude d'un modèle dans R^2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Par continuité, il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le problème restreint à $\gamma \times]-T, T[$ se présente de la façon suivante:

1. $\mathscr{V} =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times]-T, T[\subset\gamma\times]-T, T[$;
2. $u(z, t_0) \neq 0$ pour $z \in]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[$;
3. $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t)\,\partial_z + c(z, t)$ dans $\mathscr{V}_+ =]z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon[\times[0, T[$;
4. $b(z, t) \geqslant 0$ dans $\mathscr{V}_+$ (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction $\psi(z, t) = t + t_0(z-z_0)^2\,\varepsilon^{-2}$ et les paraboles P_τ d'équations $\psi(z, t) = \tau$. Nous obtenons ainsi un point (z_2, t_2) du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$ tel que $t_2 < t_0$ et $u = 0$ dans $\{(z, t) \in \mathscr{V} \mid \psi(z, t) \leqslant \psi(z_2, t_2)\}$.

Comme tout à l'heure, si on avait $b(z_2, t) = 0$ pour tout $t \in]t_2, T[$, on prouverait que $u(z_2, t_0) = 0$ ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc $t_3 \in]t_2, T[$ tel que $b(z_2, t_3) > 0$. Nous distinguons alors deux cas de figure:

1. Si $t_2 > 0$, posons $\theta(z) = t_2 + t_0\left(\dfrac{z_2-z_0}{\varepsilon}\right)^2 - t_0\left(\dfrac{z-z_0}{\varepsilon}\right)^2$ (en sorte que $t \geqslant \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geqslant \psi(z_2, t_2)$). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) contenant (z_2, t_3) (où $b>0$) tel que b soit positive dans $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geqslant \theta(z)\}$ et $u = 0$ dans $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leqslant \theta(z)\}$. Par le lemme 3.3 nous en déduisons que $u = 0$ au voisinage de (z_2, t_2) ce qui contredit le fait que (z_2, t_2) est un point du support de la trace de u sur $\mathscr{V}_+$.

2. Si $t_2 = 0$, posons $\theta(z) = 0$. Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe w de (z_2, t_2) possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

Chapitre 4: Etude d'un modèle dans $\mathbf{R}^2$

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits: le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans $\mathbf{R}^2$ (ce qui assure que rg $\mathscr{L} \leqslant 2$) qui fournit des contre-exemples où le champ L est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.

Pour traiter le problème non caractéristique général dans $\mathbf{R}^2$, nous savons d'après le lemme 1.3 qu'il suffit d'étudier le champ $L = \partial_t + ib(y, t)\,\partial_y$ où b est à valeurs réelles. Nous allons examiner ici le cas où la fonction b est indépendante de y, c'est-à-dire que L prend la forme

$$L = \partial_t + ib(t)\,\partial_y\,.$$

Pour un tel modèle, la condition (R) dans un voisinage de l'origine entraîne la condition (P) dans un ouvert $\mathring{\Omega}_+$, Ω étant un autre voisinage de l'origine, si bien que le théorème 1.2 s'énonce plus simplement de la façon suivante: s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $b(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $]0, T[$, alors il y a unicité (au sens de la conclusion du théorème 1.2, et pour tout terme c d'ordre zéro).

Dans le lemme ci-dessous (que nous ne démontrons pas car nous ne l'utiliserons pas), nous analysons la condition précédente.

LEMME 4.1. *Soient* $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction* C^∞ *et* $B(t) = \int_0^t b(s)ds$. *Alors il est équivalent de dire:*

(i) $\forall T > 0, b$ *change de signe dans l'intervalle* $]0, T[$.

(ii) Il existe une suite de réels δ_k *décroissante et tendant vers* 0 *telle que pour tout* $k \geqslant 1$,

$$\begin{cases} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], (-1)^k B(\delta_k) \geqslant (-1)^k B(t), \quad \textit{et} \\ (-1)^k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big) > 0\,. \end{cases}$$

Dans cette situation, nous allons montrer que l'on peut modifier le terme d'ordre zéro c en sorte que l'opérateur $L + c$ ne possède pas la propriété d'unicité, à condition toutefois de faire l'hypothèse supplémentaire que la suite $(-1)^k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big)$ ne tend pas trop vite vers zéro.

THÉORÈME 4.2. *Soient* $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et* $c : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ *deux fonctions* C^∞; *posons* $B(t) = \int_0^t b(s)ds$, *et supposons qu'il existe une suite de réels* δ_k *décroissante et tendant vers* 0, *et un réel* $\varepsilon_1 > 0$ *tels que si l'on pose* $\varepsilon_{k+1} = \exp[-\varepsilon_k^{-1}]$ *pour tout* $k \geqslant 1$ *on ait*

$$\begin{cases} \forall t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}], (-1)^k B(\delta_k) \geqslant (-1)^k B(t), \quad \textit{et} \\ (-1)^k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big) \geqslant \varepsilon_k\,. \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage ω *de* $(0,0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$, $u \in C^\infty(\omega)$ *et* $a \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$(4.1)\quad \begin{cases} [\partial_t + ib(t)\,\partial_y + c(y,t) + a(y,t)]\,u(y,t) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega\,, \\ \operatorname{supp} u = \omega_+ = \{(y,t) \in \omega \mid t \geqslant 0\}, \quad \textit{et} \\ \operatorname{supp} a \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Exemple. Le lecteur vérifiera facilement que la fonction

$$\begin{cases} b(t) = e^{-1/t}\sin(1/t) & \text{pour} \quad t > 0\,, \\ b(t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

satisfait les hypothèses du théorème (on prendra $\delta_k = 1/k\pi$).

La démonstration du théorème 4.2 s'effectue en deux étapes: d'abord nous construisons cinq suites de paramètres λ_k, m_k, p_k, q_k, γ_k possédant de bonnes propriétés asymptotiques; la deuxième étape, plus standard, utilise ces paramètres pour construire les fonctions u et a par une technique de recollement analogue à la méthode de Cohen [8] (cf. aussi les calculs du paragraphe 2.4).

PROPOSITION 4.3. *Sous les hypothèses du théorème 4.2, il existe cinq suites de réels positifs* λ_k, m_k, p_k, q_k *et* γ_k *telles que*

$$(4.2)\quad \begin{cases} \delta_{k+1} < p_k < m_k < q_k < \delta_k\,, \\ \forall t \in [\delta_{k+1}, p_k],\ (-1)^k(B(t) - B(m_k)) \leqslant -\dfrac{1}{2}(-1)^k(B(m_k) - B(\delta_{k+1})) \\ \textit{et} \quad (-1)^k(B(t) - B(\delta_k)) \leqslant -\dfrac{7}{8}(-1)^k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))\,, \\ \textit{et} \quad \forall t \in [q_k, \delta_k],\ (-1)^k(B(t) - B(m_k)) \geqslant \dfrac{1}{2}(-1)^k(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))\,. \end{cases}$$

$$(4.3)\quad \begin{cases} [-\gamma_k + (-1)^k\lambda_k(B(m_k) - B(\delta_k))] \\ = [-\gamma_{k+1} + (-1)^{k+1}\lambda_{k+1}(B(m_k) - B(\delta_{k+1}))]\,. \end{cases}$$

$$(4.4)\quad \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}\lambda_k}{\gamma_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(p_k - \delta_{k+1})}{\lambda_k(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1}))} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} = 0\,.$$

$$(4.5)\quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(\lambda_k+\lambda_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)} \\[2ex] \displaystyle = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(\delta_k-q_k)}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)} = 0\,. \end{cases}$$

Démonstration: en quatre parties.

1. *Construction de la suite* λ_k. Nous choisissons $\lambda_k = \varepsilon_k^{-3}$; on peut alors écrire

$$\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_k\,|\,B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\,|} \leqslant \frac{-3\operatorname{Log}\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^{-3}\,\varepsilon_k} = -3\,\varepsilon_k^2 \operatorname{Log}\varepsilon_{k+1} = 3\,\varepsilon_k, \qquad \text{d'où}$$

$$(4.6)\qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_k\big(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1})\big)} = 0\,.$$

En outre, comme $\varepsilon_{k+1}^{-3} \geqslant e^3\varepsilon_k^{-3}$ (car $e^x \geqslant ex \Rightarrow (e^x)^3 \geqslant e^3x^3$),

$$(4.7)\qquad \lambda_{k+1} \geqslant 2\,\lambda_k\,.$$

2. *Construction des suites* m_k, p_k *et* q_k. En utilisant (4.7), nous pouvons écrire

$$0 < \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}(-1)^k\big(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1})\big) < (-1)^k\big(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1})\big)$$

et donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, nous obtenons l'existence d'un point $m_k \in\,]\delta_{k+1}, \delta_k[$ tel que

$$(4.8)\qquad (-1)^k\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big) = \frac{1}{2}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}(-1)^k\big(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1})\big)\,.$$

Nous posons ensuite:

$$p_k = \sup\{p > \delta_{k+1} \mid \forall t \in [\delta_{k+1}, p],$$
$$(-1)^k\big(B(t)-B(\delta_{k+1})\big) \leqslant \frac{1}{2}(-1)^k\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)\}$$

$$q_k = \inf\{q < \delta_k \mid \forall t \in [q, \delta_k],$$
$$(-1)^k\big(B(t)-B(\delta_{k+1})\big) \geqslant \frac{3}{2}(-1)^k\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)\}\,.$$

La propriété (4.2) se déduit facilement de cette définition et de (4.8). Nous aurons en outre besoin d'estimations sur $p_k - \delta_{k+1}$ et $\delta_k - q_k$. Or $B(p_k) - B(\delta_{k+1}) = \frac{1}{2}\big(B(m_k)-B(\delta_{k+1})\big)$; par le théorème des accroissements finis, il existe donc $\theta_k \in\,]\delta_{k+1}, p_k[$ tel que

$$(p_k - \delta_{k+1})\, b(\theta_k) = \frac{1}{2}\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big)$$

et comme b est bornée au voisinage de 0, on obtient pour un $C > 0$

$$(p_k - \delta_{k+1}) \geqslant C(-1)^k\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big).$$

En multipliant cette inégalité par λ_{k+1} et en utilisant (4.8) il vient

$$\lambda_{k+1}(p_k - \delta_{k+1}) \geqslant \frac{C}{2}(-1)^k\lambda_k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big).$$

On procède de la même façon pour estimer $\delta_k - q_k$; λ_k ayant été choisi de telle sorte que $(-1)^k\lambda_k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big)$ tende vers l'infini avec k, on a donc

$$(4.9)\quad \begin{cases} \text{pour } k \text{ suffisamment grand} \\ |\operatorname{Log}(p_k - \delta_{k+1})| \leqslant \operatorname{Log}\lambda_{k+1} \quad \text{et} \quad |\operatorname{Log}(\delta_k - q_k)| \leqslant \operatorname{Log}\lambda_{k+1}. \end{cases}$$

3. *Construction de la suite* γ_k. Pour construire γ_k nous prenons la propriété (4.3) comme définition, c'est-à-dire que nous posons

$$\gamma_1 = 0, \text{ puis pour } k \geqslant 1,$$
$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - (-1)^k\lambda_k\big(B(m_k) - B(\delta_k)\big) + (-1)^{k+1}\lambda_{k+1}\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big).$$

De (4.7) et (4.8) nous tirons

$$(-1)^k\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big) \leqslant \frac{1}{4}(-1)^k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big), \quad \text{d'où}$$

$$(-1)^k\big(B(\delta_k) - B(m_k)\big) \geqslant \frac{3}{4}(-1)^k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big), \quad \text{puis}$$

$$-(-1)^k\lambda_k\big(B(m_k) - B(\delta_k)\big) \geqslant \frac{3}{2}(-1)^k\lambda_{k+1}\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big).$$

En reportant cette estimation dans la définition de γ_k, on obtient

$$(4.10)\qquad \gamma_{k+1} \geqslant \gamma_k + \frac{1}{2}(-1)^k\lambda_{k+1}\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big).$$

4. *Calcul des limites (4.4) et (4.5).* De (4.8) et (4.10) nous tirons que

$$\gamma_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(-1)^k\lambda_{k+1}\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big) = \frac{1}{4}(-1)^k\lambda_k\big(B(\delta_k) - B(\delta_{k+1})\big),$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} \leqslant \frac{4\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{(-1)^k\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))}.$$

Grâce à (4.6), nous en déduisons que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{Log}\lambda_k}{\gamma_k} = 0.$$

De plus, en utilisant (4.9) nous pouvons écrire

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| \leqslant \left|\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))}\right|, \qquad \text{et}$$

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(\delta_k-q_k)}{\gamma_{k+1}}\right| \leqslant \frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}}$$

d'où (4.4) en utilisant (4.6) et le résultat précédent.

Grâce à (4.7) et (4.9) on a

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(\lambda_k+\lambda_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| \leqslant \left|\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}(1+o(1))}{\lambda_{k+1}(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right|,$$

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| \leqslant \left|\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right|,$$

$$\left|\frac{\operatorname{Log}(\delta_k-q_k)}{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| \leqslant \left|\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))}\right|,$$

puis d'après (4.8),

$$\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}(B(m_k)-B(\delta_{k+1}))} = \frac{2\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))},$$

ce qui implique (4.5) en utilisant (4.6).

Démonstration du théorème 4.2. Etant donnée une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant: $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $\chi = 1$ sur $[1, +\infty[$, nous définissons dans $\omega = \mathbf{R} \times]-\infty, \delta_1[$ les fonctions suivantes:

$$u_k(y, t) = \exp\left[-\gamma_k+(-1)^k\lambda_k(B(t)-B(\delta_k)+iy)\right],$$

$$\varphi_k(t) = \chi\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{p_k-\delta_{k+1}}\right) \quad \text{et} \quad \psi_k(t) = \chi\left(\frac{t-\delta_k}{q_k-\delta_k}\right),$$

$$\begin{cases} u_0(y, t) = \varphi_k(t)u_k(y, t) + \psi_k(t)u_{k+1}(y, t) & \text{pour} \quad t \in [\delta_{k+1}, \delta_k], \\ u_0(y, t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0(y,t) = (\partial_t u_0(y,t) + ib(t)\,\partial_y u_0(y,t))/u_0(y,t) & \text{si} \quad u_0(y,t) \neq 0\,, \\ a_0(y,t) = 0 & \text{si} \quad u_0(y,t) = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(y,t) = b(t)\displaystyle\int_0^t \partial_y c(y,s)ds & \text{pour} \quad t > 0\,, \\ a_1(y,t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Puis enfin nous posons

$$a(y,t) = -a_0(y,t) + ia_1(y,t), \qquad \text{et}$$

$$u(y,t) = u_0(y,t)\exp\left[-\int_0^t c(y,s)ds\right].$$

Comme $\exp\left[-\int_0^t c(y,s)ds\right]$ est C^∞ et non nulle, il suffit, pour montrer que a et u sont solutions du problème (4.1), d'établir les quatre points suivants:

1. *La fonction u_0 est C^∞ dans ω.* La fonction u_0 est clairement C^∞ pour $t > 0$ ainsi que pour $t < 0$. Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de u_0 pour les petites valeurs de t.

Comme $(-1)^k(B(t)-B(\delta_k)) \leqslant 0$ et $(-1)^{k+1}(B(t)-B(\delta_{k+1})) \leqslant 0$ pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, et que $\varphi_k(t) = 1$ pour $t \in [p_k, \delta_k]$, on peut écrire les estimations suivantes:

$$|\,\partial^\alpha(\varphi_k u_k)\,| \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\beta \lambda_k^{|\beta|} e^{-\gamma_k} \quad \text{pour} \quad t \in [p_k, \delta_k]\,, \quad \text{et}$$

$$|\,\partial^\alpha(\psi_k u_{k+1})\,| \leqslant \sum_{\beta+\gamma \leqslant \alpha} C_{\beta\gamma}(\delta_k - q_k)^{-|\gamma|}\lambda_{k+1}^{|\beta|} e^{-\gamma_{k+1}}$$

$$\text{pour} \quad t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$$

où les constantes C_β et $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α, de χ et de b, mais pas de k. Or le logarithme de chacun de ces termes vaut

$$\operatorname{Log} C_\beta + |\,\beta\,|\operatorname{Log}\lambda_k - \gamma_k = \gamma_k\left[\frac{\operatorname{Log} C_\beta}{\gamma_k} + |\,\beta\,|\frac{\operatorname{Log}\lambda_k}{\gamma_k} - 1\right], \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Log} C_{\beta\gamma} - |\,\gamma\,|\operatorname{Log}(\delta_k - q_k) + |\,\beta\,|\operatorname{Log}\lambda_{k+1} - \gamma_{k+1}$$
$$= \gamma_{k+1}\left[\frac{\operatorname{Log} C_{\beta\gamma}}{\gamma_{k+1}} - |\,\gamma\,|\frac{\operatorname{Log}(\delta_k - q_k)}{\gamma_{k+1}} + |\,\beta\,|\frac{\operatorname{Log}\lambda_{k+1}}{\gamma_{k+1}} - 1\right]$$

et tend vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4); donc les quantités de départ tendent vers 0.

Reste à estimer le terme $\partial^\alpha[\varphi_k(t)u_k(y,t)]$ pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$; dans ce domaine, $(-1)^k(B(t)-B(\delta_k)) \leqslant -\frac{7}{8}(-1)^k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))$ d'après (4.2), d'où l'estimation

$$|\partial^\alpha(\varphi_k u_k)|$$
$$\leqslant \sum_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma}(p_k-\delta_{k+1})^{-|\gamma|}\lambda_k^{|\beta|}\exp\left[-\gamma_k-\frac{7}{8}(-1)^k\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right],$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α, de χ et de b, mais pas de k; comme ci-dessus, on calcule le logarithme des termes de cette somme

$$\operatorname{Log} C_{\beta\gamma} - |\gamma| \operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1}) + |\beta| \operatorname{Log}\lambda_k$$
$$-\left[\gamma_k+\frac{7}{8}(-1)^k\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right] \leqslant \left[\gamma_k+\frac{7}{8}(-1)^k\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))\right]$$
$$\times\left[\left|\frac{\operatorname{Log} C_{\beta\gamma}}{\gamma_k}\right| + |\gamma|\left|\frac{8\operatorname{Log}(p_k-\delta_{k+1})}{7\lambda_k(B(\delta_k)-B(\delta_{k+1}))}\right| + |\beta|\frac{\operatorname{Log}\lambda_k}{\gamma_k} - 1\right]$$

et cette expression tend à son tour vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini grâce à (4.4). Nous avons donc démontré:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\mathbf{R}\times[\delta_{k+1},\delta_k]} |\partial^\alpha u_0(y,t)|\right) = 0.$$

2. *Le support de a est contenu dans* $\operatorname{supp} u_0 = \{(y,t)\in\omega \mid t \geqslant 0\}$. Pour $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$, posons $v_k = u_k/u_{k+1}$. En utilisant (4.3), on peut écrire:

$$v_k(y,t) = \exp[(-1)^k(\lambda_k+\lambda_{k+1})(B(t)-B(m_k)+iy)]. \tag{4.11}$$

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, on a grâce à (4.2) $|v_k| < 1$, et comme $u_0 = u_{k+1}(1+\varphi_k v_k)$, on a $u_0 \neq 0$. De même pour $t \in [q_k, \delta_k]$, $|v_k| > 1$ et $u_0 = u_k(1+\psi_k/v_k) \neq 0$. Enfin, pour $t \in [p_k, q_k]$, $u_0 = u_k + u_{k+1}$, et donc $u_0 = 0$ équivaut à $v_k = -1$, ce qui entraîne d'après (4.11) que

$$\exp[(-1)^k(\lambda_k+\lambda_{k+1})iy] = -1,$$

soit $y \in \left\{\frac{(2n+1)\pi}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\}$; cet ensemble étant discret, on obtient que $\operatorname{supp} u_0 = \{(y,t)\in\omega \mid t \geqslant 0\}$.

Par définition de a_0, $\operatorname{supp} a_0 \subset \operatorname{supp} u_0$, et par définition de a_1, $\operatorname{supp} a_1 \subset \{(y,t)\in\omega \mid t \geqslant 0\}$, d'où finalement $\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u_0$.

3. *La fonction* a_0 *est* C^∞ *dans* ω. Pour tout k, on a $\partial_t u_k + ib\,\partial_y u_k = 0$, et donc pour $t \in [p_k, q_k]$, $u_0 = u_k + u_{k+1} \Rightarrow a_0 = \partial_t u_0 + ib\,\partial_y u_0 = 0$; pour $t \in [q_{k+1}, p_k]$, $u_0 \neq 0$ donc $a_0 = (\partial_t u_0 + ib\partial_y u_0)/u_0$ est une fonction C^∞. Il en résulte que la fonction a_0 est C^∞ dans les domaines d'équations $t > 0$ et $t < 0$.

Pour conclure au voisinage de $t = 0$, il faut estimer les dérivées de a_0 pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$ et $t \in [q_k, \delta_k]$ (a_0 est nulle en dehors de ces intervalles).

Pour $t \in [\delta_{k+1}, p_k]$, $|v_k| < 1$, et on peut écrire

$$a_0 = \frac{(\partial_t + ib\partial_y)(\varphi_k u_k + u_{k+1})}{\varphi_k u_k + u_{k+1}} = \frac{w_k}{1 + x_k}, \qquad \text{où}$$

$$w_k(y, t) = (p_k - \delta_{k+1})^{-1}\,\chi'\left(\frac{t - \delta_{k+1}}{p_k - \delta_{k+1}}\right) v_k(y, t) \qquad \text{et}$$

$$x_k(y, t) = \varphi_k(t) v_k(y, t)\,.$$

Pour montrer que les dérivées de cette expression tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour les fonctions w_k et x_k. En utilisant (4.2) et (4.11), on obtient les majorations

$$|\partial^\alpha w_k| \leqslant \sum_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma}(p_k - \delta_{k+1})^{-1-|\gamma|}(\lambda_k + \lambda_{k+1})^{|\beta|}$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2}(-1)^k(\lambda_k + \lambda_{k+1})\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big)\right],$$

$$|\partial^\alpha x_k| \leqslant \sum_{\beta+\gamma\leqslant\alpha} C_{\beta\gamma}(p_k - \delta_{k+1})^{-|\gamma|}(\lambda_k + \lambda_{k+1})^{|\beta|}$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2}(-1)^k(\lambda_k + \lambda_{k+1})\big(B(m_k) - B(\delta_{k+1})\big)\right],$$

où les constantes $C_{\beta\gamma}$ ne dépendent que de α, de χ et de b, mais pas de k. Comme tout à l'heure, on montre que ces expressions tendent vers 0 en calculant leurs logarithmes et en utilisant (4.5). Nous obtenons donc

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\mathbf{R}\times[\delta_{k+1}, p_k]} |\partial^\alpha a_0|\right) = 0\,.$$

On montre de même à l'aide de (4.2), (4.11) et (4.5) que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\mathbf{R}\times[q_k, \delta_k]} |\partial^\alpha a_0|\right) = 0\,.$$

4. *La fonction* a_1 *est* C^∞ *dans* ω. Pour obtenir cette dernière propriété, il suffit de remarquer que toutes les dérivées de la fonction b tendent vers 0

lorsque $t > 0$ tend vers 0. En effet, comme $b(\delta_k) = 0$ pour tout k, nous obtenons par application répétée du théorème de Rolle que pour tous j et k entiers positifs, il existe un point $\theta_k^j \in]\delta_{k+j}, \delta_k[$ tel que $\partial_t^j b(\theta_k^j) = 0$; la limite annoncée en résulte.

Chapitre 5: Le problème caractéristique

Dans ce chapitre, nous donnons deux résultats: l'un d'unicité, l'autre de non-unicité.

Au paragraphe 5.1, nous regardons ce qui subsiste du théorème 1.2 lorsque nous supprimons l'hypothèse que le problème est non caractéristique. Le résultat d'unicité (théorème 5.2) découlera d'un théorème sur la géométrie du support d'une solution (théorème 5.1) qui est dû à Bony (cf. Sjöstrand [22, th. 8.7] qui en donne une extension aux équations d'ordres supérieurs).

Puis au paragraphe suivant (5.2) nous construisons un contre-exemple à l'unicité sous la condition que le rang de $\mathscr{L}$ est constant. Ce dernier résultat est dû à Saint Raymond [21, th. 2.9].

5.1. Résultat d'unicité lorsque $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 1.2, mais sans nous donner de fonction φ ni supposer que le problème est non caractéristique. Cela signifie que nous sommes dans l'un des deux cas suivants:

1. L vérifie la condition (R) dans un ouvert Ω où $\operatorname{rg} \mathscr{L} \leqslant 2$ (cf. 1.2).
2. L vérifie la condition (P) dans un ouvert Ω (cf. 1.2).

Donnons-nous de plus une solution $u \in C^1(\Omega)$ de l'équation $(L+c_0)u(x) = 0$ dans Ω. Alors, pour paraphraser le théorème 1.2, chaque fois que l'on trouvera $x_0 \in \Omega$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles tels qu'il existe un voisinage ω de x_0 avec

$$x_0 \in (\operatorname{supp} u \cap \omega) \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\},$$

on pourra affirmer que le problème en x_0 est caractéristique, c'est-à-dire que $L\varphi(x_0) = 0$ ou encore que $X\varphi(x_0) = Y\varphi(x_0) = 0$ (si $X = \operatorname{Re} L$ et $Y = \operatorname{Im} L$). Cette remarque nous donne une relation entre les champs réels X et Y et le fermé $F = \operatorname{supp} u$ dont nous allons analyser les conséquences dans le prochain théorème.