§4. Rappel de la table des caractères de G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 1. *L'unité et les éléments* $b(\gamma)$, *avec* $\gamma \in X$, *forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre* A_α. *La structure d'algèbre s'exprime par la relation suivante:*

$$b(\gamma_1)\, b(\gamma_2) = q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha\gamma_1\, \gamma_2) + q^{-1}(q-1)^{-2}\, (\alpha\gamma_1\gamma_2)\, (-1)\, g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)\, g(\gamma_1\gamma^{-1}) g(\gamma_2\gamma^{-1}) b(\gamma) \tag{5}$$

pour $\gamma_1, \gamma_2 \in X$; *on somme sur* $\gamma \in X$.

§ 4. RAPPEL DE LA TABLE DES CARACTÈRES DE G CALCUL DES VALEURS DES CARACTÈRES DE G SUR LES GÉNÉRATEURS DE A_α

Les caractères sont en « dualité » avec les classes de conjugaison. Correspondant aux quatre « types » de telles classes, il y a quatre « séries » de caractères. Toute la situation se résume dans le tableau suivant:

		caractères	χ^1_μ	χ^q_μ	$\chi_{\mu,\upsilon}$	χ_Λ
classes de conjugaison						
représentant	diviseurs élémentaires	paramètres	$\mu \in X$	$\mu \in X$	$\mu, \upsilon \in X$ $\mu \neq \upsilon$ modulo $(\mu, \upsilon) \sim (\upsilon, \mu)$	$\Lambda \in Y$ modulo $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$X-a$ $X-a$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	$q\,\mu^2(a)$	$(q+1)\,\mu\upsilon(a)$	$(q-1)\,\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	1 $(X-a)^2$	$a \in F^\times$	$\mu^2(a)$	0	$\mu\upsilon(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	1 $(X-a)\,(X-d)$	$a, d \in F^\times$ $a \neq d$ modulo $(a, d) \sim (d, a)$	$\mu(ad)$	$\mu(ad)$	$\mu(a)\,\upsilon(d)$ $+\,\mu(d)\,\upsilon(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{N}(x) \\ -1 & \mathrm{Tr}(x) \end{pmatrix}$	1 $X^2-\mathrm{Tr}(x)X+\mathrm{N}(x)$	$x \in E^\times$ $x \notin F^\times$ modulo $x \sim x^q$	$\mu(\mathrm{N}(x))$	$-\mu(\mathrm{N}(x))$	0	$-(\Lambda+\Lambda^q)\,(x)$

Ici E désigne le corps fini a q^2 éléments, Tr (resp. N) dénote la trace (resp. norme) de E sur F, i.e. pour $x \in E$, on a

$$\mathrm{Tr}(x) = x + x^q \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(x) = x\, x^q ,$$

Y désigne le groupe des caractères de $E^\times$.

Une des nombreuses références pour le calcul des caractères de G est [9].

Pour tout caractère χ de G, nous désignons aussi par χ l'extension par linéarité de χ à $\mathbf{C}\,[G]$ et nous nous proposons d'en calculer la restriction à la sous-algèbre A_α. Pour l'unité e de A_α, on obtient

$$\chi(e) = \chi(e_\theta) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \theta(h^{-1})\, \chi(h) = \langle \theta, \mathrm{Res}_H^G\, \chi \rangle = \langle \mathrm{Ind}_H^G\, \theta, \chi \rangle$$

et d'une manière explicite:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a,b} \bar{\alpha}(a)\, \bar{\psi}(b)\, \chi\big(c(a)\, u(b)\big), \quad a \in F^\times, b \in F^+ ;$$

or la suite des diviseurs élémentaires de $c(a)\, u(b)$ est 1, $(X-a)^2$, si $b \neq 0$, et $X - a$, $X - a$, si $b = 0$, pour $a \in F^\times$, $b \in F^+$, d'où:

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a, b \neq 0} \bar{\alpha}(a)\, \bar{\psi}(b)\, \chi\big(1, (X-a)^2\big) + \sum_a \bar{\alpha}(a)\, \chi(X-a, X-a)\big)$$

$a, b \in F$; mais ψ étant un caractère non-trivial de F^+, on a

$$\sum_{b \neq 0} \psi(b) = -1, b \in F, \quad \text{d'où}$$

$$\chi(e) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_a \bar{\alpha}(a) \left[\chi(X-a, X-a) - \chi\big(1, (X-a)^2\big)\right], \quad a \in F^\times .$$

En utilisant la table des caractères, on obtient, pour $\mu, \upsilon \in X$,

$$\chi_\mu^1(e) = 0, \chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\, \mu^2), \chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)$$

et $\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda)$, où λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$, pour $\Lambda \in Y$.

D'après [2], Corollaire 1.2, les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ sont donnés par les caractères χ de G, tels que $\chi(e) = 1$. Nous calculons, dans la suite, leurs valeurs sur les générateurs $b(\gamma)$ de A_α avec $\gamma \in X$.

LEMME 1. *Soit* χ *un caractère de* G *et* $\gamma \in X$; *on a*

$$\chi(b(\gamma))$$
$$= q^{-1}(q-1)^{-2}\, \gamma(-1) \sum_{\substack{a, c \in F^\times \\ b \in F^+}} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})\,(a)\, \gamma(c)\, \bar{\psi}(a^{-1}b)\, \chi(1, X^2 - bX + c),$$

ici α *dénote le caractère central fixé.*

En effet, on a $\chi(b(\gamma)) = (q-1)^{-1} \sum_a \gamma(a)\chi(a), \quad a \in F^\times$.

Or

$$b(a) = ed(a)ze = q^{-2}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} \alpha(a_1 a_2)\, \psi(b_1+b_2) c(a_1) u(b_1) d(a) z c(a_2) u(b_2)$$

$$= q^{-2}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b_1, b_2} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b_1+b_2)\, c(a_1)\, u(b_1)\, d(a) z u(b_2),\ a_1, a_2 \in F^\times,\ b_1, b_2 \in F^+.$$

La suite des diviseurs élémentaires de $c(a_1)\, u(b_1)\, d(a)\, z\, u(b_2)$ est égale à $1, X^2 - a_1(b_1+b_2)X - a_1^2 a$, pour $a_1, a \in F^\times$, $b_1, b_2 \in F^+$, d'où

$$\chi(b(a)) = q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(b)\, \chi(1, X^2 - a_1 b X - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times,\ b \in F^+.$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1} \sum_{a_1, b} \bar{\alpha}(a_1)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a_1 \in F^\times,\ b \in F^+.$$

On obtient donc

$$\chi(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a, a_1, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(a)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX - a_1^2 a),\ a, a_1 \in F^\times,\ b \in F$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2} \sum_{a_1, c, b} \alpha(a_1^{-1})\, \gamma(-a_1^{-2} c)\, \bar{\psi}(a_1^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c)$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2}\, \gamma(-1) \sum_{a, c, b} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\, \gamma(c)\, \bar{\psi}(a^{-1} b)\, \chi(1, X^2 - bX + c),$$

ce qui prouve le lemme 1.

PROPOSITION 2. *Les valeurs des caractères de* G *sur les générateurs de* A *sont données par:*

$$\chi_\mu^1(e) = \chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0,$$

$$\chi_\mu^q(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu^2),\ \chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\, \gamma(-1)\, g(\gamma\mu)^2,$$

$$\chi_{\mu,\upsilon}(e) = \delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon),\ \chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\, (\alpha\gamma)\, (-1)\, g(\gamma\mu)\, g(\gamma\upsilon),$$

$$\chi_\Lambda(e) = \delta(\alpha^{-1}\lambda),\ \chi_\Lambda(b(\gamma)) = -q^{-1}(q-1)^{-1}\, \delta(\alpha^{-1}\lambda)\, (\alpha\gamma)\, (-1)\, G(\gamma^*\Lambda);$$

ici $\mu, \upsilon, \gamma \in X, \alpha$ *caractère central fixé,* $\Lambda \in Y$; λ *dénote la restriction de* Λ *à* $F^\times$ *et* γ^* *dénote le composé de* γ *avec la norme de* $E^\times$ *sur* $F^\times$; *la somme de Gauss* $G(\Lambda\gamma^*)$ *est définie par*

$$G(\Lambda\gamma^*) = \sum_{x \in E^\times} (\Lambda\gamma^*)(x)\, \psi(\mathrm{Tr}(x)).$$

Démonstration. Les valeurs sur l'unité e ont déjà été calculées au début du paragraphe. De $\chi_\mu^1(1, X^2 - bX + c) = \mu(c)$, pour tout $b \in F^+$, $c \in F^\times$, $\mu \in X$ on déduit que $\chi_\mu^1(b(\gamma)) = 0$, pour tout $\gamma \in X$.

D'après le lemme 1, on obtient

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\sum_{a,c,b}(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\gamma(c)\,\bar{\psi}(a^{-1}b)\,\chi_\mu^q(1, X^2-bX+c)\,;$$

d'après la table des caractères, on a

$$\chi_\mu^q(1, X^2-bX+c) = \begin{cases} 0 & \\ \mu(a_1a_2) & \text{si} \quad X^2-bX+c \\ -\mu(\mathrm{N}(x)) & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (X-a)^2 & \text{avec} \quad a \in F^\times \\ (X-a_1(X-a_2)) & \text{avec} \quad a_1, a_2 \in F^\times,\ a_1 \neq a_2 \\ (X-x)(X-x^q) & \text{avec} \quad x \in E^\times - F^\times \end{cases}$$

d'où

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2}\sum_{\substack{a\\ a_1\neq a_2}}(\alpha^{-1}\gamma^{-2}(a))\,\gamma(a_1a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1\,a_2)$$

$$-\,q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2}\sum_{\substack{a\\ x\neq x^q}}(\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\,\bar{\psi}(a^{-1}\mathrm{Tr}(x))\mu(\mathrm{N}(x))\,,$$

ici l'on somme sur a, a_1, $a_2 \in F^\times$ et $x \in E^\times$. On ne change rien à la valeur de $\chi_\mu^q(b(\gamma))$ si dans les sommations on enlève la restriction $a_1 \neq a_2$ et $x \neq x^q$. Après un changement d'indices de sommation, l'on obtient

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1)\frac{1}{2}\Big(\sum_{a,a_1,a_2}(\alpha^{-1}\mu^2)(a)\,\gamma(a_1a_2)\,\psi(a_1+a_2)\,\mu(a_1a_2)$$

$$-\sum_{a,x}(\alpha^{-1}\mu^2)(a)\,\gamma(\mathrm{N}(x))\psi(\mathrm{Tr}(x))\,\mu(\mathrm{N}(x))\Big),\ a, a_1, a_2 \in F^\times,\ x \in E^\times\,,$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\frac{1}{2}\left[g(\gamma\mu)^2 - G((\gamma\mu)^*)\right],$$

où $G((\gamma\mu)^*) = \sum_{x\in E^\times}(\gamma\mu)(\mathrm{N}(x))\,\psi(\mathrm{Tr}(x))$. D'après le théorème de Davenport et Hasse [3], on a $G((\gamma\mu)^*) = -g(\gamma\mu)^2$, d'où

$$\chi_\mu^q(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\gamma(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu^2)\,g(\gamma\mu)^2\,.$$

Le calcul de $\chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma))$ est plus facile, on obtient, d'après le lemme 1 et la table des caractères

$$\chi_{\mu,\upsilon}(b(\gamma)) = q^{-1}(q-1)^{-2}\,\gamma(-1) \sum_{a,a_1,a_2} (\alpha^{-1}\gamma^{-2})(a)\,\gamma(a_1a_2)\,\bar{\psi}(a^{-1}(a_1+a_2))\,\mu(a_1)\,\upsilon$$

$$a, a_1, a_2 \in F^\times,$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-2}(\gamma\mu\upsilon)(-1) \sum_{a,c_1,c_2} (\alpha^{-1}\mu\upsilon)(a)\,(\gamma\mu)(c_1)\,(\gamma\upsilon)(c_1)\,\psi(c_1+c_2),$$

$$a, c_1, c_2 \in F^\times,$$

$$= q^{-1}(q-1)^{-1}(\alpha\gamma)(-1)\,\delta(\alpha^{-1}\mu\upsilon)\,g(\gamma\mu)\,g(\gamma\upsilon);$$

le calcul de $\chi_\Lambda(b(\gamma))$ est analogue et est laissé au lecteur. La démonstration de la proposition 2 est ainsi terminée.

Remarque 1. Soit χ un caractère de G tel que $\chi(e) = 1$. Un tel caractère définit un homomorphisme d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$, comme on l'a déjà remarqué, c.f. [2]. On a donc

$$\chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = \chi(b(\gamma_1)b(\gamma_2)),$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, et la relation (5) du théorème 1 donne ainsi lieu à l'identité suivante:

$$(5)^\chi \qquad \chi(b(\gamma_1))\,\chi(b(\gamma_2)) = q^{-1}(q-1)^{-1}\,\delta(\alpha\gamma_1\gamma_2)$$
$$+\, q^{-1}(q-1)^{-2}(\alpha\gamma_1\gamma_2)(-1)\,g(\alpha\gamma_1\gamma_2) \sum_\gamma \gamma(-1)\,g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,\chi(b(\gamma))$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 2. En spécialisant la remarque 1, pour $\chi = \chi_\mu^q$ (resp. $\chi = \chi_{\mu,\nu}$, resp. $\chi = \chi_\Lambda$) avec $\mu \in X$ tel que $\mu^2 = \alpha$ (resp. avec $\mu, \nu \in X$ tels que $\mu \neq \nu$ et $\mu\nu = \alpha$, resp. avec $\Lambda \in Y$ tel que $\Lambda \neq \Lambda^q$ et $\lambda = \alpha$) et en appliquant la proposition 2, on obtient les identités suivantes:

$$(5)_\mu^q \qquad g(\gamma_1\mu)^2\,g(\gamma_2\mu)^2 = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu^2)$$
$$+\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu^2) \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)^2,\,.$$

resp.

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad g(\gamma_1\mu)\,g(\gamma_1\nu)\,g(\gamma_2\mu)\,g(\gamma_2\nu) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)(\mu\nu)(-1)$$
$$+\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu) \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,g(\mu\gamma)\,g(\nu\gamma),$$

resp.

$$(5)_\Lambda \qquad G(\gamma_1^*\Lambda)\,G(\gamma_2^*\Lambda) = q(q-1)\,\delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\,\lambda(-1)$$
$$-\,(q-1)^{-1}\,g(\gamma_1\gamma_2\lambda) \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\,g(\gamma_2\gamma^{-1})\,G(\gamma^*\Lambda),$$

pour γ_1, $\gamma_2 \in X$, sommation sur $\gamma \in X$.

Remarque 3. On observe que les identités $(5)_{\mu,\nu}$ [resp. $(5)_\Lambda$] considérées pour tous les $\mu, \nu \in X$ [resp. $\Lambda \in Y$] contiennent l'identité $(5)^q_\mu$ comme cas particulier « dégénéré », correspondant à $\mu = \nu$ [resp. $\Lambda = \Lambda^q$, $\Lambda = \mu \circ \mathrm{N}$].

Remarque 4. Pour tout $\beta \in X$, on a $\delta(\beta)\, g(\beta) = -1$. Les identités peuvent donc s'énoncer sous la forme suivante:

$$(5)_{\mu,\nu} \qquad (q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, g(\mu\gamma)\, g(\nu\gamma)$$

$$= \frac{g(\gamma_1\mu)\, g(\gamma_1\nu)\, g(\gamma_2\mu)\, g(\gamma_2\nu)}{g(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)} + q(q-1)\, \delta(\gamma_1\gamma_2\mu\nu)\, (\mu\nu)\, (-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in X$, sommation sur $\gamma \in X$, et

$$(5)_\Lambda \qquad -(q-1)^{-1} \sum_\gamma g(\gamma_1\gamma^{-1})\, g(\gamma_2\gamma^{-1})\, G(\gamma^*\Lambda)$$

$$= \frac{G(\gamma_1^*\Lambda)\, G(\gamma_2^*\Lambda)}{g(\gamma_1\gamma_2\lambda)} + q(q-1)\, \delta(\gamma_1\gamma_2\lambda)\, \lambda(-1)\,,$$

pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in X$, $\Lambda \in Y$, sommation sur $\gamma \in X$, λ dénote la restriction de Λ à $F^\times$.

Nous reconnaissons ainsi les identités (i) et (iv) du théorème 1 de notre publication [4], dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, et nous voyons bien comment la série principale (resp. discrète) de caractères $\chi_{\mu,\nu}$ (resp. χ_Λ) amène aux identités de Barnes (i) (resp. (iv)). Ceci termine la première partie de cet article.

RAPPEL DU THÉORÈME 1 DE [4]. *Soit F (resp. F_2, resp. F_4) le corps fini à q (resp. q^2, resp. q^4) éléments; on note $F_2^\times$ (resp. $F_4^\times$) le groupe multiplicatif de F_2 (resp. F_4), et on se fixe un caractère non-trivial* exp *du groupe additif F^+. Pour un caractère α de $F^\times$, on pose*

$$G_1(\alpha) = g(\alpha) = \sum_a \alpha(a) \exp(a)\,,$$

où l'on somme sur tous les $a \in F^\times$. On note Tr_2 *(resp.* Tr_4*) la trace de F_2 (resp. F_4) sur F, et l'on note* N *(resp.* $\mathrm{N}_{4/2}$*) la norme de F_2 sur F (resp. F_4 sur F_2). Pour un caractère Λ de $F_2^\times$, on note $G_2(\Lambda)$ la somme de Gauss suivante*

$$G_2(\Lambda) = \sum_x \Lambda(x) \exp(\mathrm{Tr}_2(x))\,,$$

où l'on somme sur tous les $x \in F_2^\times$. *De manière analogue, pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on pose*

$$G_4(\Phi) = \sum_z \Phi(z) \exp\left(\mathrm{Tr}_4(z)\right),$$

où l'on somme sur tous les $z \in F_4^\times$. *On a les cinq identités suivantes:*

(i) *Pour quatre caractères* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *de* $F^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha^{-1})\, g(\alpha_3\alpha)\, g(\alpha_4\alpha^{-1})$$

$$= \frac{g(\alpha_1\alpha_2)\, g(\alpha_2\alpha_3)\, g(\alpha_3\alpha_4)\, g(\alpha_4\alpha_1)}{g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\, (\alpha_1\alpha_3)\, (-1),$$

ici l'on somme sur les caractères α *de* $F^\times$;

(ii) *pour un caractère* Φ *de* $F_4^\times$, *on a*

$$-(q+1)^{-1} \sum_\Lambda G_4\big(\Phi(\Lambda \circ \mathrm{N}_{4/2})\big) = \frac{G_4(\Phi^{q+1})}{g(\varphi)} + q(q-1)\, \delta(\varphi)\, \Phi(\varepsilon_0),$$

ici l'on somme sur les caractères Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *dénote un élément de* F_2 *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$; φ *dénote la restriction de* Φ *à* $F^\times$;

(iii) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha G_2\big(\Lambda_1(\alpha \circ \mathrm{N})\big)\, G_2\big(\Lambda_2(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\big)$$

$$= \frac{G_2(\Lambda_1\Lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2^q)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1),$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) désigne la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(iv) *pour* α_1, α_2 *caractères de* $F^\times$, Λ *caractère de* $F_2^\times$, *on a*

$$-(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1\alpha)\, g(\alpha_2\alpha)\, G_2\big(\Lambda(\alpha \circ \mathrm{N})^{-1}\big)$$

$$= \frac{G_2\big(\Lambda(\alpha_1 \circ \mathrm{N})\big)\, G_2\big(\Lambda(\alpha_2 \circ \mathrm{N})\big)}{g(\alpha_1\alpha_2\lambda)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1\alpha_2\lambda)\, \lambda(-1),$$

ici λ *désigne la restriction de* Λ *à* $F^\times$, *l'on somme sur tous les caractères* α *de* $F^\times$;

(v) *pour* Λ_1, Λ_2 *caractères de* $F_2^\times$, *on a*

$$(q+1)^{-1} \sum_{\Lambda} G_2(\Lambda_1\Lambda)\, G_2(\Lambda_2\Lambda)$$

$$= \frac{g(\lambda_1)\, g(\lambda_2)\, G_2(\Lambda_1\Lambda_2)}{g(\lambda_1\lambda_2)} + q(q-1)\, \delta(\lambda_1\lambda_2)\, \lambda_1(-1)\, (\Lambda_1\Lambda_2)\, (\varepsilon_0)\,,$$

ici λ_1 *(resp.* λ_2*) dénote la restriction de* Λ_1 *(resp.* Λ_2*) à* $F^\times$, *l'on somme sur les caractères* Λ *de* $F_2^\times$ *dont la restriction à* $F^\times$ *soit triviale,* ε_0 *désigne un élément de* $F_2^\times$ *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités sont des cas particuliers d'une identité plus générale qui fait l'objet du théorème 2 de notre publication [4]. La démonstration se base sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 sur F et fait intervenir le groupe symétrique des permutations de quatre éléments ainsi que le groupe diédrale D_4 du carré. L'identité générale s'énonce pour chaque $\sigma \in D_4$, mais elle ne dépend que de la classe de conjugaison de σ. Les cinq classes de conjugaison de D_4 fournissent les cinq identités de Barnes.

Dans la suite de cet article nous calculons la trace de l'algèbre A_α (§ 5) et nous utilisons les identités de Barnes (i) et (iv) pour exhiber les homomorphismes d'algèbres de A_α dans $\mathbf{C}$ indépendamment de la table des caractères (§ 6). La comparaison de leur somme avec la trace montre que la liste des homomorphismes est complète et sans répétitions.

§ 5. Calcul de la trace de l'algèbre A_α

On note T_α la trace de l'algèbre A_α, $\alpha \in X$ fixé. Soit B la base de A_α formée par l'unité et les $b(\gamma)$, avec $\gamma \in X$; pour $b \in B$ et $a \in A_\alpha$, on définit le coefficient $<b' \mid a>$ dans $\mathbf{C}$ par la condition suivante:

$$a = \sum_{b \in B} <b' \mid a> b\,;$$

on a, pour tout $a \in A_\alpha$,

$$T_\alpha(a) = \sum_{b \in B} <b' \mid ab>\,.$$

On obtient

$$T_\alpha(1) = \dim_{\mathbf{C}}(A_\alpha) = q$$