Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES
Autor: Troyanov, Marc
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55079

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 79-94

LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES

par Marc TROYANOV

INTRODUCTION

Une surface euclidienne est une surface possédant localement la structure du plan euclidien; on peut, de manière équivalente, la définir à l'aide d'une métrique riemannienne plate (c'est-à-dire à courbure nulle).

Une surface euclidienne à singularités coniques (on abrégera s.e.s.c.) est une surface possédant localement la géométrie d'un cône standard; on peut également la définir à l'aide d'une métrique riemannienne plate avec des singularités spécifiques.

Un cône standard possède un unique invariant: son ouverture (qui est un nombre réel positif). La s.e.s.c. possède donc un invariant pour chacune de ses singularités.

En outre, une surface euclidienne (ou riemannienne) avec singularités coniques détermine une unique structure conforme.

Le but de cet article est de montrer que la donnée de ces invariants caractérise complètement une s.e.s.c. compacte et orientable, et d'obtenir ainsi une classification de ces surfaces (Théorème du § 5).

L'exposé présenté est élémentaire et ne nécessite, pour sa compréhension, aucune connaissance autre que les définitions de surface de Riemann et de métrique riemannienne (à l'exception d'un résultat technique donné en appendice).

§ 1. STRUCTURE LOCALE D'UNE SINGULARITÉ CONIQUE

Définition. $V_\theta := \{(r;t) : r \geqslant 0; t \in \mathbf{R}/\theta\mathbf{Z}\}/(0;t) \sim (0;t')$ muni de la métrique

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dt^2$$

s'appelle le *cône standard* d'angle total θ. On utilise parfois les nombres $k = 2\pi - \theta$ et $\beta = (\theta/2\pi) - 1$; k s'appelle la courbure concentrée de V_θ, β le poids ou le résidu. Les nombres θ, k et β sont des mesures de l'ouverture du cône V_θ.

Ces appellations peuvent être justifiées ainsi: prenons le cas où $\theta < 2\pi$ et plongeons le cône V_θ dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ (fig. 1). Si on considère une sphère unité tangente intérieurement à V_θ on remarque que l'image sphérique de toute approximation (lisse et convexe) de V_θ est une calotte sphérique d'aire $2\pi - \theta$ d'où le nom de « courbure concentrée » pour ce nombre.

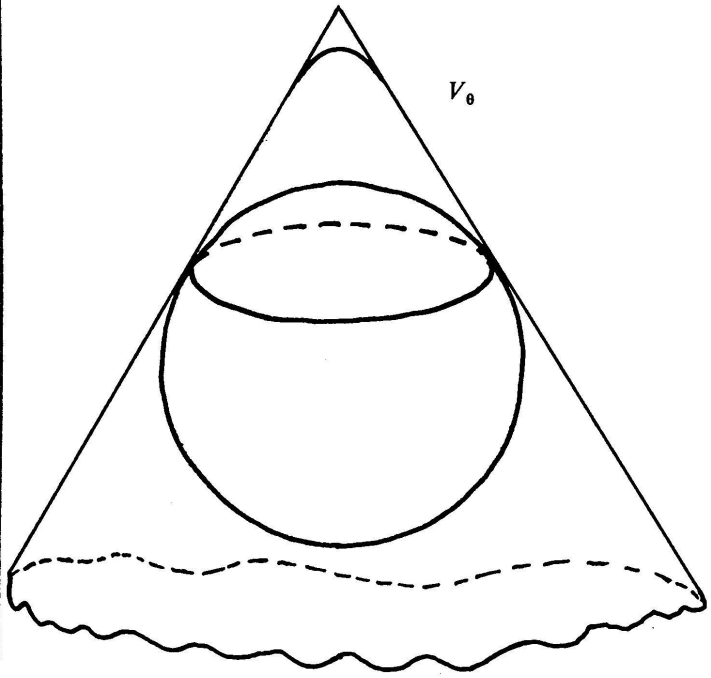

FIGURE 1

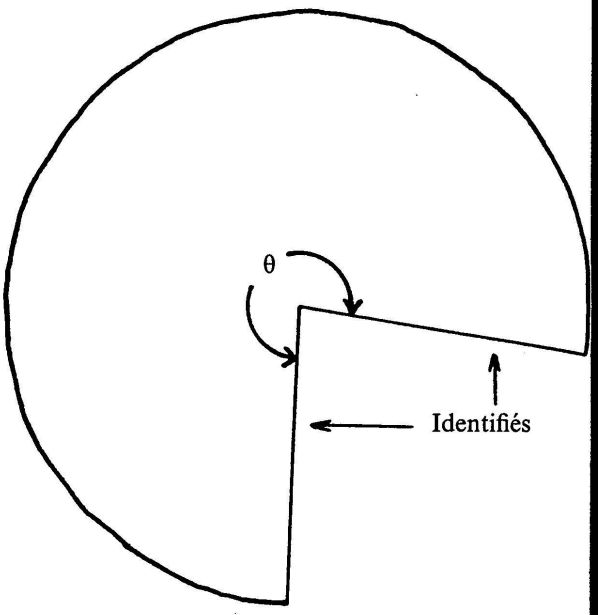

FIGURE 2

Si un cône est fabriqué à partir d'un secteur d'angle θ en recollant les bords par une isométrie, l'angle total de ce cône est précisément θ (remarquons que θ peut être supérieur à 2π). θ est en fait la longueur du cercle de rayon 1 centré au sommet du cône (fig. 2).

Le nombre β est introduit pour des raisons plus techniques venant de la structure conforme:

PROPOSITION 1. $\mathbf{C}$, *muni de la métrique* $ds^2 = |z|^{2\beta}|dz|^2$, *est isométrique à* V_θ.

Preuve. Si $z = x + iy$, l'isométrie est donnée par

$$\begin{cases} x = a r^{\frac{2\pi}{\theta}} \cos\left(\dfrac{2\pi}{\theta} t\right) \\ y = a r^{\frac{2\pi}{\theta}} \sin\left(\dfrac{2\pi}{\theta} t\right) \end{cases}$$

avec $a = \left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2\pi}{\theta}}$.

Définition. On dit qu'une fonction

$$h : U \to \mathbf{R}$$

(U ouvert de $\mathbf{C}$) est harmonique avec singularité logarithmique de résidu (ou poids) β en $p \in U$ si la fonction

$$z \mapsto h(z) - \beta \log | z - p |$$

est harmonique.

On remarque que cette notion est indépendante de la coordonnée z choisie.

PROPOSITION 2. *Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, et si $h : U \to \mathbf{C}$ est harmonique avec singularité logarithmique de poids $\beta > -1$ en $p \in U$ et si on munit U de la métrique*

$$ds^2 = e^{2h} | dz |^2$$

alors il existe un voisinage de p dans U isométrique à un voisinage du sommet du cône V_θ (pour $\theta = 2\pi(\beta + 1)$).

Définition. On dira dans ce cas que p est une singularité conique d'angle θ pour la métrique ds^2.

Preuve. Supposons pour simplifier que $p = 0$; alors il existe une fonction $g(z)$ holomorphe dans un voisinage de 0 et telle que

$$\operatorname{Re} g(z) = h(z) - \beta \log | z |,$$

car cette fonction est harmonique par hypothèse. On a

$$e^{g(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (a_0 \neq 0).$$

Posons

$$b_k = \frac{\beta + 1}{\beta + k + 1} a_k ;$$

alors la série $\sum_k b_k z^k$ converge dans un voisinage de 0 vers une fonction analytique f telle que $f(0) \neq 0$. Considérons la fonction

$$w = zf(z)^{1/\beta+1}.$$

(On a choisi une détermination du log au voisinage de $f(0)$). On a $\frac{1}{\beta+1} w^{\beta+1} = \int_0^z t^\beta e^{g(t)} dt$ pour toute détermination. Donc $w^\beta dw = z^\beta e^{g(z)} dz = e^{g(z)+\beta \log z} dz$ et

$$|w|^\beta |dw| = e^{\mathrm{Re}(g(z)+\beta \log(z))} |dz| = e^{h(z)} |dz|.$$

Donc $ds^2 = |w|^{2\beta} |dw|^2$ ce qui prouve la proposition 2 grâce à la proposition 1.

Remarques. 1) On n'a nulle part utilisé que $\beta \neq 0$, donc on a montré que si h est harmonique, alors

$$ds^2 = e^{2h} |dz|$$

est une métrique plate.

2) La démonstration montre également que si $\mu(z)$ est une fonction holomorphe possédant un zéro d'ordre m à l'origine alors il existe une coordonnée w telle que

$$w^m dw^q = \mu(z) dz^q$$

(où $q = 1, 2, 3, \ldots$). Ce fait est important en théorie des formes modulaires et des différentielles quadratiques. On appelle w la « coordonnée normale » au voisinage du zéro.

Définition. Deux métriques riemanniennes ds_0, ds_1 sur une variété M sont dites *conformes* s'il existe une fonction $h: M \to \mathbf{R}$ telle que .

$$ds_1^2 = e^{2h} ds_0^2$$

Une classe d'équivalence de métriques conformes sur M s'appelle *une structure conforme.* Si M est une surface orientable, alors les structures conformes s'identifient avec les structures complexes (cf. [2], [3]). Une surface orientable munie d'une structure conforme (ou complexe) s'appelle une *surface de Riemann.*

PROPOSITION 3. *Soit S une surface munie de deux métriques conformes ds_0, ds_1 (alors $ds_1 = e^h ds_0$). Supposons que ds_0 soit plate.*

Alors: ds_1 *est plate si et seulement si* h *est harmonique.*

De plus: $p \in S$ *est un point conique d'angle* θ_i *pour* $ds_i^2\,(i=1,2)$ *si et seulement si* h *a en* p *une singularité logarithmique de poids* $\beta_1 - \beta_0$ $\left(\text{où } \beta_i = \dfrac{\theta_i}{2\pi} - 1\right)$.

(θ_i *n'est pas nécessairement différent de* 2π*).*

Preuve. Soit $S_0 = S - \{\text{singularités de } ds_0 \text{ ou } ds_1\}$. Soit $p \in S_0$; si h est harmonique et ds_0 plate la proposition 2 implique que ds_1 est également plate en p (cf. remarque 1). Inversément, si ds_0 et ds_1 sont toutes deux plates, alors il existe deux systèmes de coordonnées, $(x\,;y)$ et $(u\,;v)$ au voisinage de p tels que:

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{et} \quad ds_1^2 = du^2 + dv^2\,.$$

Notons $z = x + iy$ et $w = u + iv$ et soit $w = g(z)$ l'application identité dans ces coordonnées. Alors g est holomorphe et on a

$$ds_1^2 = |\,dw\,|^2 = |\,g'(z)\,|^2\,|\,dz\,|^2\,;$$

or

$$ds_1^2 = e^{2h} ds_0^2 = e^{2h}\,|\,dz\,|^2\,.$$

Donc $h(z) = \log|\,g'(z)\,|$ est bien harmonique. Si $p \notin S_0$, p est un point conique d'angle θ_i pour $ds_i (i=1,2)$. Alors il existe des coordonnées z et w au voisinage de p telles que $z = w = 0$ en p et

$$ds_0^2 = |\,z\,|^{2\beta_0}\,|\,dz\,|^2\,,\ ds_1^2 = |\,w\,|^{2\beta_1}\,|\,dw\,|^2$$

(cf. proposition 1).

Soit $w = g(z)$ l'identité; g est holomorphe en $z \neq 0$ mais comme g est un difféomorphisme g est encore holomorphe à l'origine. De plus $g'(z)$ ne s'annule pas. $g(0) = 0$ est donc un zéro simple c'est-à-dire il existe g_1 tel que $g(z) = zg_1(z)$ et g_1 ne s'annule pas. Ainsi

$$ds_1^2 = |\,w\,|^{2\beta_1}\,|\,dw\,|^2 = |\,zg_1(z)\,|^{2\beta_1}\,|\,g'(z)\,|^2\,|\,dz\,|^2\,,$$

mais

$$ds_1^2 = e^{2h} ds_0^2 = e^{2h}\,|\,z\,|^{2\beta_0}\,|\,dz\,|^2\,.$$

Donc $h(z) = (\beta_1 - \beta_0)\log|\,z\,| + \beta_1 \log|\,g_1(z)\,| + \log|\,g'(z)\,|$ est harmonique avec singularité logarithmique de poids $(\beta_1 - \beta_0)$ en $z = 0$ (car g' et g_1 ne s'annulent pas).

§ 2. Surfaces euclidiennes à singularités coniques Définitions-exemples

Une surface euclidienne à singularités coniques est une surface possédant localement la géométrie du plan euclidien ou d'un cône standard. Plus précisément:

Définition. Soient S une surface, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des points de S et $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ des nombres positifs. On dit que S a une *structure euclidienne avec singularités coniques* $x_1, x_2, \ldots$ d'angle $\theta_1, \theta_2, \ldots$, si $S_0 := S \backslash \{x_1\, x_2 \ldots\}$ possède une structure euclidienne pour laquelle x_i admet un voisinage isométrique à un voisinage du sommet dans le cône standard V_{θ_i}. La donnée de S et d'une telle structure sur S s'appelle une surface euclidienne à singularités coniques, on abrégera s.e.s.c.

Remarquons que si S est une s.e.s.c. alors les singularités forment un ensemble discret, en particulier si S est compacte, elles sont en nombre fini.

Exemples. 1) Les polyèdres de dimension 2 forment une vaste classe de s.e.s.c. Les points singuliers sont les sommets et leur angle est la somme des angles que chaque face incidente forme à ce sommet. (Un point sur une arête est un point régulier, on s'en convainc en dépliant un voisinage de ce point.)

2) Si G est un groupe d'isométries du plan $\mathbf{R}^2$ opérant de façon proprement discontinue et en préservant l'orientation, alors $\mathbf{R}^2/G$ est une s.e.s.c. Les points singuliers correspondent aux points du plan dont le stabilisateur est non trivial. Il s'agit alors d'un sous-groupe fini de G qui ne peut être qu'un groupe cyclique d'ordre m. L'angle en ce point conique est alors $2\pi/m$.

3) Si S est une surface de Riemann, toute différentielle quadratique (cf. § 4) définit une structure de s.e.s.c.

4) Si S est une surface euclidienne (avec ou sans singularités) et S' est un revêtement ramifié de S alors S' est une s.e.s.c. Si $p \in S$ est un point de branchement d'ordre m et si c'est de plus un point conique d'angle θ, alors tout point p' au-dessus de p est un point conique d'angle θm.

§ 3. Un peu de géométrie globale

On appelle géodésique d'une s.e.s.c. toute courbe minimisant la longueur entre deux quelconques de ses points assez proches.

Il est évident qu'une géodésique d'une s.e.s.c. correspond (dans toute carte) à un segment de droite euclidienne qui peut, le cas échéant, être brisée en un point singulier; elle y forme alors un angle $\geqslant \pi$. En particulier une géodésique ne passe jamais par une singularité conique dont la courbure concentrée est positive (car l'angle total est $< 2\pi$).

Proposition 1. *Soit S une s.e.s.c. complète.*

i) *Si $p, q \in S$ il existe une géodésique de longueur $d(p; q)$ reliant p à q.*

ii) *Toute classe d'homotopie peut être représentée par une géodésique de longueur minimale.*

Cette proposition est vraie dans le cas beaucoup plus général des « Espaces de longueurs » (cf. [4], page 6, pour une preuve).

Proposition 2. *Toute s.e.s.c. compacte admet une triangulation géodésique telle que chaque point singulier soit un sommet et chaque arête soit incidente à deux faces différentes.*

(On appellera « normale » une telle triangulation, l'existence de triangulations normales montre que l'exemple 1 du § 2 est, en fait, le cas général.)

Preuve. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de S par des ouverts isométriques à un disque du plan euclidien ou du cône standard. Choisissons $F_\alpha \subset U_\alpha$ un fermé dont le bord est une ligne polygonale et opérons ce choix de sorte que les F_α recouvrent encore S. Si $F_\alpha \cap F_\beta$ n'est pas vide, c'est un fermé dont le bord est polygonal; il est donc possible de trianguler les F_α de façon que toutes les intersections $F_\alpha \cap F_\beta$ non vides soient des réunions de triangles. Il ne reste qu'à subdiviser cette triangulation pour obtenir la triangulation voulue.

Proposition 3 (Formule de Gauss-Bonnet). *Si S est une s.e.s.c. compacte (sans bord) avec singularités en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'angle $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ alors*

$$\sum_i k_i = 2\pi\chi(S) \text{ (où } k_i = 2\pi - \theta_i).$$

Preuve. Choisissons une triangulation normale T. Si q est un sommet de T, posons

$$\theta_q = \begin{cases} \theta_i & \text{si} \quad q = x_i \\ 2\pi & \text{si} \quad q \text{ est un point régulier}. \end{cases}$$

Posons également $k_q = 2\pi - \theta_q$.

Soient $a; b; c$ respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de T. Comme T est une triangulation, on a $2b = 3c$ donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - 2\pi b + 2\pi c = 2\pi a - \pi c.$$

Chaque triangle est un triangle euclidien, donc

$$\pi b = \sum \theta_q$$

(la somme étant prise sur l'ensemble des sommets de T). On a donc

$$2\pi\chi(S) = 2\pi a - \sum_q \theta_q = \sum_q (2\pi - \theta_q) = \sum_i (2\pi - \theta_i) = \sum_i k_i.$$

COROLLAIRE 1. *Si S est une s.e.s.c. homéomorphe à la sphère S^2, alors il existe au moins trois singularités de courbure concentrée positive.*

Preuve. k_i est strictement inférieur à 2, donc s'il existe moins de trois singularités à courbure positive, on a

$$\sum_i k_i < 4\pi = 2\pi\chi(S).$$

COROLLAIRE 2. *Si S est une s.e.s.c. dont toutes les singularités ont une courbure concentrée négative, alors une géodésique minimale reliant deux points $p, q \in S$ est unique dans sa classe d'homotopie relative.*

Preuve. Quitte à passer au revêtement universel, on peut supposer S simplement connexe. S'il existait deux géodésiques reliant p à q, elles borderaient un (ou plusieurs) disque à bord polygonal dont au plus deux angles sont inférieurs à π. En recollant deux exemplaires de ce disque sur leur bord on obtiendrait une s.e.s.c. homéomorphe à S^2 avec moins de trois points coniques à courbure concentrée positive.

§ 4. Les différentielles quadratiques

Soit S une surface de Riemann. On notera TS son fibré tangent, c'est une variété analytique complexe de dimension 2. Si $p \in S$, on notera T_pS la fibre au-dessus de p (l'espace tangent en p).

Définition. Une différentielle quadratique sur S est une fonction holomorphe.

$$\omega : TS \to \mathbf{C}$$

qui, restreinte à chaque fibre, est une forme quadratique.

Rappelons que les seules formes quadratiques sur $\mathbf{C}(\cong T_pS)$ sont

$$t \to \mu t^2 \quad (\mu \in \mathbf{C} \text{ est une constante})$$

Donc si $U \subset S$ est le domaine d'une coordonnée z, alors toute différentielle quadratique ω est donnée par une fonction holomorphe $\mu : U \to \mathbf{C}$ telle que $\omega = \mu(z)dz^2$. Si $z' = f(z)$ est une autre coordonnée sur U et μ' la fonction correspondante, alors on doit avoir :

$$\mu'(z') = \mu(z)\left(\frac{dz}{dz'}\right)^2.$$

Notons $Q(S)$ l'espace vectoriel complexe des différentielles quadratiques sur S. Remarquons que si S est une surface close de genre > 0, $Q(S)$ n'est pas réduit à 0 ($Q(S)$ contient les carrés des différentielles abéliennes, cf. [2] ou [6]). Soit $\omega \in Q(S) - \{0\}$ et z une coordonnée au voisinage d'un point $p \in S$ pour laquelle ω s'écrit $\mu(z)dz^2$. Supposons que μ ait en p un zéro d'ordre m. Alors on dira que m est *l'ordre* de ω en p. Il est immédiat que ce nombre ne dépend pas de la coordonnée choisie.

Lemme 1. *Soit $p \in S$ et ω une différentielle quadratique non nulle d'ordre m en p. Alors il existe une coordonnée z au voisinage de p telle que $z(p) = 0$ et $\omega = z^m dz^2$. De plus, cette coordonnée est unique à une rotation d'angle $\dfrac{k2\pi}{m+2}$ radians près (k est un entier).*

On appelle z la coordonnée « normale » ou « distinguée » en p.

Preuve.

Existence. Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 2 du § 1.

Unicité. Si $z^m dz^2 = w^m dw^2$, alors

$$\frac{dw}{dz} = \pm \left(\frac{z}{w}\right)^{m/2}.$$

Une solution est donnée par

$$w = e^{id}z \Rightarrow e^{id} = \frac{dw}{dz} = \pm e^{-idm/2} \Rightarrow d(1+m/2) = k\pi \Rightarrow d = \frac{k2\pi}{m+2}.$$

Cette solution est unique une fois une condition initiale donnée.

PROPOSITION 1. *Soit S une surface de Riemann close et soit ω une différentielle quadratique non nulle sur S.*

Alors ω définit sur S une structure euclidienne à singularités coniques.

Si $x_1, ..., x_n$ sont les zéros de ω et ont pour ordre $m_1, ..., m_n$ alors $x_1, ..., x_n$ sont les singularités coniques et ont pour angle $(m_1+2)\pi, ..., (m_n+2)\pi$ respectivement.

Preuve. La métrique est donnée par $ds^2 := |\omega|$. La proposition 2 du § 1 implique les propriétés énoncées.

COROLLAIRE. *Soit S une surface de Riemann close de genre g et $\omega \in Q(S) - \{0\}$. Alors le nombre de zéros de ω (comptés avec multiplicités) est $4g - 4$. (En particulier, il n'existe aucune différentielle quadratiques non nulle sur une surface de Riemann homéomorphe à S^2).*

Preuve. Si x_i est un zéro d'ordre m_i, la courbure concentrée est $k_i = -m_i\pi$. On applique la formule de Gauss-Bonnet. □

En plus d'une structure de s.e.s.c., une différentielle quadratique induit sur S deux feuilletages mesurés, orthogonaux l'un à l'autre (avec des singularités), définis par:

X est un vecteur horizontal	si et seulement si	$\omega(X)$ est un réel positif
Y est un vecteur vertical	si et seulement si	$\omega(Y)$ est un réel négatif.

Dans [5], Hubbard et Masur étudient ces feuilletages et leurs liens avec la théorie des différentielles quadratiques. La proposition 1 dit que certaines structures de s.e.s.c. sur une surface close peuvent être obtenues à partir d'une différentielle quadratique, à condition que les angles des points coniques soient tous des multiples entiers de π. Cette condition n'est toutefois pas suffisante, le contre-exemple le plus simple est peut-être donné

par la surface euclidienne (close et de genre 2) avec une unique singularité conique d'angle 6π obtenue en identifiant de la façon usuelle les bords d'un octogone régulier du plan euclidien.

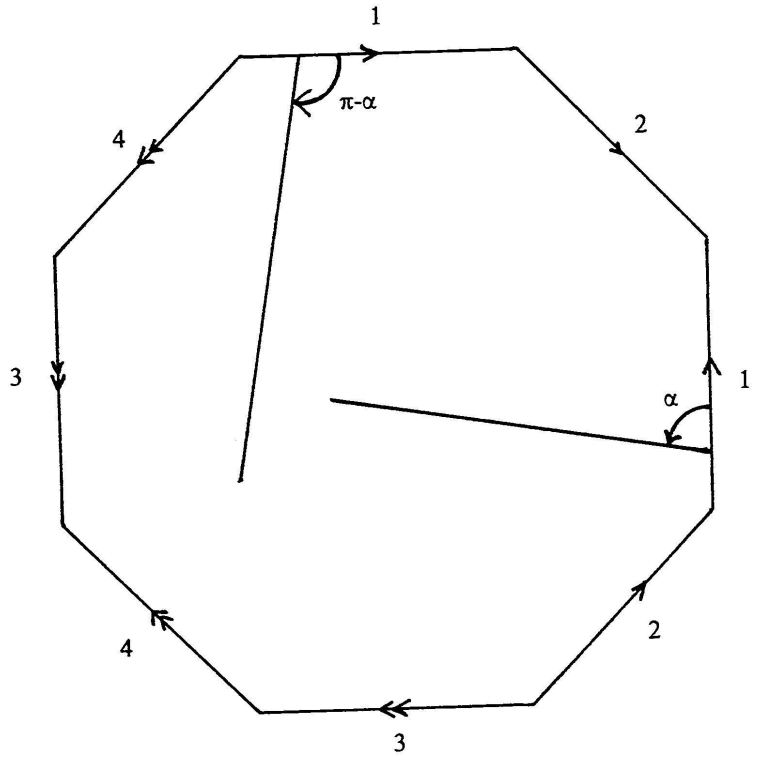

FIGURE 3

Si la structure de s.e.s.c. provenait d'une différentielle quadratique, il existerait un feuilletage géodésique sur S_0 (le feuilletage horizontal). Les feuilles devraient être des droites parallèles dans l'octogone rencontrant deux côtés identifiés selon des angles égaux. Cela est clairement impossible si les côtés identifiés ne sont pas parallèles.

Il est intéressant de noter que les différentielles quadratiques jouent un rôle central dans la théorie des déformations (des « modules ») des surfaces de Riemann (cf. [1]).

Pour une théorie complète des différentielles quadratiques, on peut se référer à [7].

§ 5. CLASSIFICATION DES S.E.S.C.

Rappelons qu'une métrique ds_1^2 sur une variété riemannienne (M, ds^2) est *conforme* s'il existe une fonction $h: M \to R$ telle que

$$ds_1^2 = e^{2h} ds^2 .$$

Lorsqu'il existe des singularités coniques, h peut prendre des valeurs infinies (avec croissance logarithmique).

Le résultat suivant classe toutes les s.e.s.c. closes et orientables.

THÉORÈME. *Soit* S *une surface close et orientable,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\theta_1, \ldots, \theta_n > 0$ *tels que*

$$\sum_i (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(S).$$

Alors dans chaque structure conforme sur S, *il existe une structure euclidienne pour laquelle* x_i *est une singularité conique d'angle* $\theta_i (i = 1, 2, \ldots n)$. *Cette structure est unique si on la normalise (par exemple en posant: Aire totale de* $S = 1$*).*

Démonstration.

Unicité. Si ds et ds' sont deux telles structures, alors par conformité il existe une fonction h telle que $ds' = e^h ds$. Alors h doit être une fonction harmonique (pour la structure conforme donnée) et sans singularité (cf. prop. 3, § 1). Comme S est compacte, h est constante et comme l'aire est normalisée, cette constante est nulle.

Existence. Supposons que S soit de genre $g > 0$, alors il existe sur la surface de Riemann S une différentielle quadratique non nulle ω. Soient $y_1, \ldots, y_k$ les zéros de ω, alors $ds_0^2 = |\omega|$ définit une métrique euclidienne conforme sur S avec singularités coniques en y_j de poids $m_j/2$ (m_j est l'ordre du zéro y_j; cf. prop. 1, § 4). On a

$$\sum_j (m_j/2) = 2g - 2 = \sum_i \beta_i \quad \left(\beta_i = \frac{\theta_i}{2\pi} - 1\right).$$

Donc en particulier:

$$\sum_i \beta_i + \sum_j (-m_j/2) = 0.$$

Pour conclure, nous utiliserons le lemme ci-dessous:

LEMME. *Soit* S *une surface de Riemann close,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. *Supposons* $\sum_i \alpha_i = 0$. *Alors il existe une fonction harmonique* $h: S \to R$ *avec singularités logarithmiques de poids* α_i *en* $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. *Si* h *et* h' *sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Il existe donc une fonction harmonique $h: S \to R$ avec singularités logarithmiques de poids

$$\begin{cases} \beta_i \text{ en } x_i \, (i=1, ..., n) \\ -m_j/2 \text{ en } y_j \, (j=1, ..., k) \end{cases}$$

alors

$$ds^2 = e^{2h} ds_0^2$$

est la métrique cherchée (cf. prop. [3], § 1).

Ce raisonnement ne convient pas si $g = 0$, la sphère mérite donc des considérations particulières:

Par le théorème d'uniformisation de Riemann (cf. [6]), il n'existe (à isomorphisme près) qu'une structure conforme sur S^2. On peut donc poser $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Soit $a_i \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la coordonnée de x_i, on peut supposer que $a_i \neq \infty$. Soit aussi $\beta_i = (\theta_i/2\pi) - 1$ alors on a

$$\sum_i \beta_i = -2$$

On pose:

$$ds^2 = \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2$$

Alors ds^2 est bien une métrique euclidienne ($\log \prod_i |z - a_i|^{\beta_i}$ est harmonique) et a_i est un point conique d'angle θ_i. Il ne reste plus qu'à vérifier que ∞ est un point régulier. Pour cela, on fait l'inversion $w = 1/z$ $\left(\text{donc } |dz|^2 = \dfrac{|dw|^2}{|w|^4}\right)$. On a

$$\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i} = \prod_i |w|^{-2\beta_i} |1 - wa_i|^{2\beta_i} = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}$$

(car $\sum_i \beta_i = -2$);

donc,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2 = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i} |dw|^2/|w|^4 \\ &= \left(\prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}\right) |dw|^2 \end{aligned}$$

est une métrique euclidienne régulière en $w = 0$ (c'est-à-dire $z = \infty$).

Ceci achève donc la preuve du théorème.

APPENDICE

Le but de cet appendice est de montrer comment le lemme utilisé dans la démonstration précédente découle du théorème de Hodge:

LEMME. *Soit* S *une surface de Riemann close,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. *Supposons* $\sum_i \alpha_i = 0$. *Alors il existe une fonction harmonique* $h: S \to \mathbf{R}$ *avec singularités logarithmiques de poids* α_i *en* $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Si h *et* h' *sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Avant de prouver ce lemme, quelques rappels sur la théorie de Hodge seront nécessaires:

Si S est une surface de Riemann, alors S est munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire d'un morphisme (linéaire) de fibré $J: TS \to TS$ tel que $J^2 = -I$ (identité). J peut être défini à l'aide d'une métrique conforme en posant $Y = JX$ si et seulement si $\{X; Y\}$ est une base orthonormée d'orientation positive, pour tout vecteur unité X.
Si ω est une 1-forme sur S, on définit $*\omega$ par:

$$*\omega(X) = -\omega(JX);$$

$*$ est également un morphisme de fibré $*: T^*S \to T^*S$ tel que $*^2 = -1$.

Si $z = x + iy$ est une coordonnée sur S, alors

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\frac{\partial}{\partial z}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$*dx = dy, \; *dy = -dx, \; *dz = -idz, \; *d\bar{z} = id\bar{z}.$$

Si f est une fonction, on a

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} i dz \wedge d\bar{z}.$$

On dit qu'une 1-forme est *harmonique* si $d\omega = d*\omega = 0$, donc ω est harmonique si et seulement si c'est localement la différentielle d'une fonction harmonique.

THÉORÈME DE HODGE. *Si* ω *est une* 1*-forme différentielle sur* S, *alors il existe* $u, v \in C^\infty(S)$ *et* ω_0 *une* 1*-forme harmonique tels que*

$$\omega = \omega_0 + du + *dv .$$

Nous ne prouvons pas ce théorème ici (cf. [6] ou [8]).

Preuve du lemme.

Unicité. Soient h et h' deux fonctions harmoniques avec les mêmes singularités logarithmiques, alors $h-h'$ est une fonction harmonique sans singularités, donc constante puisque S est compacte.

Existence. Par linéarité, il suffit de montrer que si $p, q \in S$ alors il existe $h: S \to R$, harmoniques avec singularités logarithmiques de poids -1 en p et $+1$ en q (la fonction voulue s'obtient ensuite comme combinaison linéaire de telles fonctions). On peut, pour la même raison, supposer que p et q appartiennent à un même domaine U d'une coordonnée z. Soit D un sous-domaine contenant p et q et tel que $\bar{D} \subset U$. Donnons-nous ensuite une fonction lisse $\chi: S \to R$ telle que

$$\chi|_D = 1 \quad \text{et} \quad \chi|_{S-U} = 0 .$$

On définit $f: U \to \mathbf{C}$ par $f(z) = \chi(z) \log\big((z-q)/(z-p)\big)$ et l'on étend à f à S tout entier en posant $f|_{S-U} = 0$. Considérons la 1-forme

$$\zeta = df - i*df = 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} .$$

Remarquons que $\zeta = 0$ sur $D \cup (S-U)$.

Le théorème de Hodge permet d'écrire

$$\zeta = \omega_0 + du + *dv$$

avec ω_0 harmonique. Posons ensuite

$$\omega = df - du = \omega_0 + i*df + *dv ;$$

alors ω *est fermée* car $d\omega = d(df - du) = 0$, ω *est cofermée* car

$$** = -1 \quad \text{donc} \quad d*\omega = d*\omega_0 - id^2 f - d^2 v = 0 .$$

Donc ω est harmonique.

Posons

$$h = \operatorname{Re}(f-u) = \frac{1}{2}\big((f-u) + (\bar{f}-\bar{u})\big) ;$$

alors h est harmonique puisque

$$d*dh = \frac{1}{2} d*\big(d(f-u)+d(\bar{f}-\bar{\omega})\big) = \frac{1}{2} d*(\omega+\bar{\omega}) = 0 .$$

h a clairement les singularités voulues. □

RÉFÉRENCES

[1] BERS, L. Quasi-Conformal Mapping and Teichmüller's theorems. In *Analytic function*, Princeton University Press, Princeton mathematical serie, No. 24.

[2] —— *Riemann surfaces.* Mimeographed Notes, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences (1958).

[3] CHERN, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc. 6* (1955), 771-782.

[4] GROMOV, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Textes mathématiques 1, CEDIC/Fernand-Nathan, 1981.

[5] HUBBARD, J. and H. MASUR. Quadratic differentials and foliations. *Acta. Math. 142, 3-4* (1979), 221-274.

[6] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison Wesley, 1957.

[7] STREBEL, K. *Quadratic differentials.* Springer Verlag, 1984.

[8] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate text in Mathematics 94, Springer Verlag.

(Reçu le 12 décembre 1984)

Marc Troyanov

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24