§4. Les différentielles quadratiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 4. Les différentielles quadratiques

Soit S une surface de Riemann. On notera TS son fibré tangent, c'est une variété analytique complexe de dimension 2. Si $p \in S$, on notera T_pS la fibre au-dessus de p (l'espace tangent en p).

Définition. Une différentielle quadratique sur S est une fonction holomorphe.

$$\omega : TS \to \mathbf{C}$$

qui, restreinte à chaque fibre, est une forme quadratique.

Rappelons que les seules formes quadratiques sur $\mathbf{C}(\cong T_pS)$ sont

$$t \to \mu t^2 \quad (\mu \in \mathbf{C} \text{ est une constante})$$

Donc si $U \subset S$ est le domaine d'une coordonnée z, alors toute différentielle quadratique ω est donnée par une fonction holomorphe $\mu : U \to \mathbf{C}$ telle que $\omega = \mu(z)dz^2$. Si $z' = f(z)$ est une autre coordonnée sur U et μ' la fonction correspondante, alors on doit avoir :

$$\mu'(z') = \mu(z)\left(\frac{dz}{dz'}\right)^2.$$

Notons $Q(S)$ l'espace vectoriel complexe des différentielles quadratiques sur S. Remarquons que si S est une surface close de genre > 0, $Q(S)$ n'est pas réduit à 0 ($Q(S)$ contient les carrés des différentielles abéliennes, cf. [2] ou [6]). Soit $\omega \in Q(S) - \{0\}$ et z une coordonnée au voisinage d'un point $p \in S$ pour laquelle ω s'écrit $\mu(z)dz^2$. Supposons que μ ait en p un zéro d'ordre m. Alors on dira que m est *l'ordre* de ω en p. Il est immédiat que ce nombre ne dépend pas de la coordonnée choisie.

Lemme 1. *Soit $p \in S$ et ω une différentielle quadratique non nulle d'ordre m en p. Alors il existe une coordonnée z au voisinage de p telle que $z(p) = 0$ et $\omega = z^m dz^2$. De plus, cette coordonnée est unique à une rotation d'angle $\dfrac{k2\pi}{m+2}$ radians près (k est un entier).*

On appelle z la coordonnée « normale » ou « distinguée » en p.

Preuve.

Existence. Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 2 du § 1.

Unicité. Si $z^m dz^2 = w^m dw^2$, alors

$$\frac{dw}{dz} = \pm \left(\frac{z}{w}\right)^{m/2}.$$

Une solution est donnée par

$$w = e^{id}z \Rightarrow e^{id} = \frac{dw}{dz} = \pm e^{-idm/2} \Rightarrow d(1+m/2) = k\pi \Rightarrow d = \frac{k2\pi}{m+2}.$$

Cette solution est unique une fois une condition initiale donnée.

PROPOSITION 1. *Soit S une surface de Riemann close et soit ω une différentielle quadratique non nulle sur S.*

Alors ω définit sur S une structure euclidienne à singularités coniques.

Si $x_1, ..., x_n$ sont les zéros de ω et ont pour ordre $m_1, ..., m_n$ alors $x_1, ..., x_n$ sont les singularités coniques et ont pour angle $(m_1+2)\pi, ..., (m_n+2)\pi$ respectivement.

Preuve. La métrique est donnée par $ds^2 := |\omega|$. La proposition 2 du § 1 implique les propriétés énoncées.

COROLLAIRE. *Soit S une surface de Riemann close de genre g et $\omega \in Q(S) - \{0\}$. Alors le nombre de zéros de ω (comptés avec multiplicités) est $4g - 4$. (En particulier, il n'existe aucune différentielle quadratiques non nulle sur une surface de Riemann homéomorphe à S^2).*

Preuve. Si x_i est un zéro d'ordre m_i, la courbure concentrée est $k_i = -m_i\pi$. On applique la formule de Gauss-Bonnet. □

En plus d'une structure de s.e.s.c., une différentielle quadratique induit sur S deux feuilletages mesurés, orthogonaux l'un à l'autre (avec des singularités), définis par:

X est un vecteur horizontal	si et seulement si	$\omega(X)$ est un réel positif
Y est un vecteur vertical	si et seulement si	$\omega(Y)$ est un réel négatif.

Dans [5], Hubbard et Masur étudient ces feuilletages et leurs liens avec la théorie des différentielles quadratiques. La proposition 1 dit que certaines structures de s.e.s.c. sur une surface close peuvent être obtenues à partir d'une différentielle quadratique, à condition que les angles des points coniques soient tous des multiples entiers de π. Cette condition n'est toutefois pas suffisante, le contre-exemple le plus simple est peut-être donné

par la surface euclidienne (close et de genre 2) avec une unique singularité conique d'angle 6π obtenue en identifiant de la façon usuelle les bords d'un octogone régulier du plan euclidien.

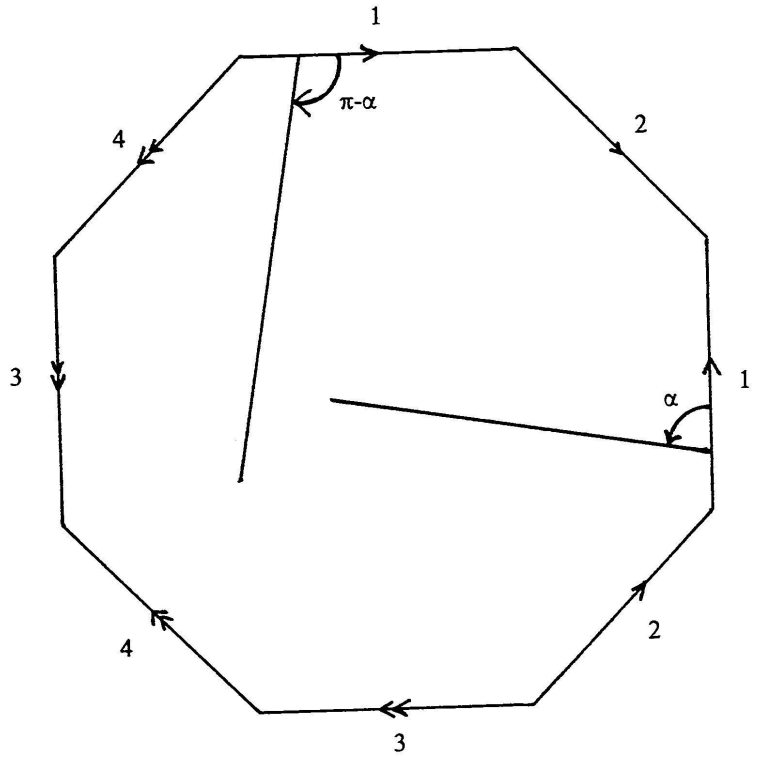

FIGURE 3

Si la structure de s.e.s.c. provenait d'une différentielle quadratique, il existerait un feuilletage géodésique sur S_0 (le feuilletage horizontal). Les feuilles devraient être des droites parallèles dans l'octogone rencontrant deux côtés identifiés selon des angles égaux. Cela est clairement impossible si les côtés identifiés ne sont pas parallèles.

Il est intéressant de noter que les différentielles quadratiques jouent un rôle central dans la théorie des déformations (des « modules ») des surfaces de Riemann (cf. [1]).

Pour une théorie complète des différentielles quadratiques, on peut se référer à [7].

§ 5. CLASSIFICATION DES S.E.S.C.

Rappelons qu'une métrique ds_1^2 sur une variété riemannienne (M, ds^2) est *conforme* s'il existe une fonction $h: M \to R$ telle que

$$ds_1^2 = e^{2h} ds^2 .$$