Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES
Autor: Troyanov, Marc
Kapitel: §5. Classification des S.E.S.C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55079

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

par la surface euclidienne (close et de genre 2) avec une unique singularité conique d'angle 6π obtenue en identifiant de la façon usuelle les bords d'un octogone régulier du plan euclidien.

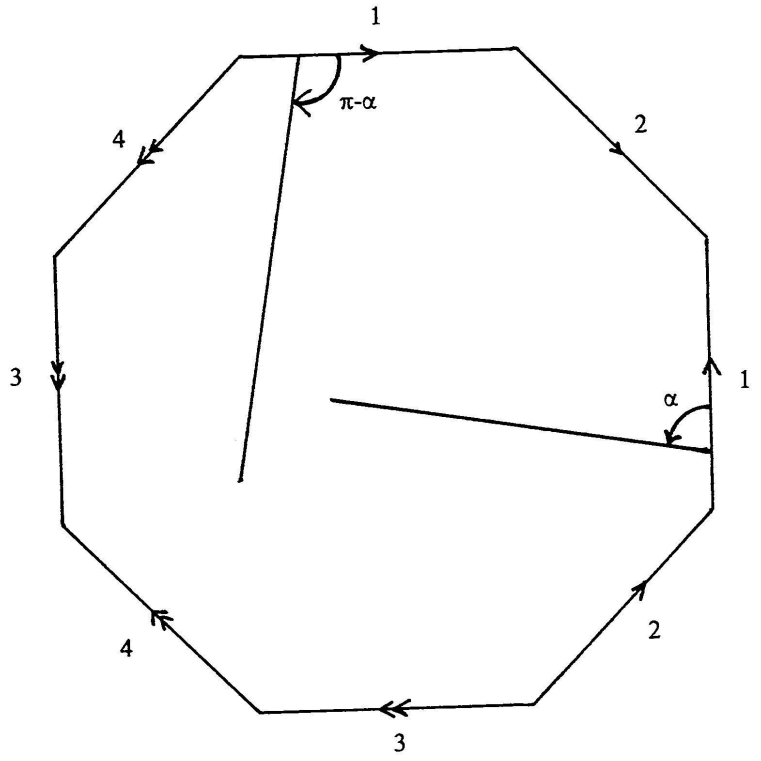

FIGURE 3

Si la structure de s.e.s.c. provenait d'une différentielle quadratique, il existerait un feuilletage géodésique sur S_0 (le feuilletage horizontal). Les feuilles devraient être des droites parallèles dans l'octogone rencontrant deux côtés identifiés selon des angles égaux. Cela est clairement impossible si les côtés identifiés ne sont pas parallèles.

Il est intéressant de noter que les différentielles quadratiques jouent un rôle central dans la théorie des déformations (des « modules ») des surfaces de Riemann (cf. [1]).

Pour une théorie complète des différentielles quadratiques, on peut se référer à [7].

§ 5. CLASSIFICATION DES S.E.S.C.

Rappelons qu'une métrique ds_1^2 sur une variété riemannienne (M, ds^2) est *conforme* s'il existe une fonction $h: M \to R$ telle que

$$ds_1^2 = e^{2h} ds^2 .$$

Lorsqu'il existe des singularités coniques, h peut prendre des valeurs infinies (avec croissance logarithmique).

Le résultat suivant classe toutes les s.e.s.c. closes et orientables.

THÉORÈME. *Soit* S *une surface close et orientable,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\theta_1, \ldots, \theta_n > 0$ *tels que*

$$\sum_i (2\pi - \theta_i) = 2\pi\chi(S).$$

Alors dans chaque structure conforme sur S, *il existe une structure euclidienne pour laquelle* x_i *est une singularité conique d'angle* $\theta_i (i = 1, 2, \ldots n)$. *Cette structure est unique si on la normalise (par exemple en posant: Aire totale de* $S = 1$*).*

Démonstration.

Unicité. Si ds et ds' sont deux telles structures, alors par conformité il existe une fonction h telle que $ds' = e^h ds$. Alors h doit être une fonction harmonique (pour la structure conforme donnée) et sans singularité (cf. prop. 3, § 1). Comme S est compacte, h est constante et comme l'aire est normalisée, cette constante est nulle.

Existence. Supposons que S soit de genre $g > 0$, alors il existe sur la surface de Riemann S une différentielle quadratique non nulle ω. Soient $y_1, \ldots, y_k$ les zéros de ω, alors $ds_0^2 = |\omega|$ définit une métrique euclidienne conforme sur S avec singularités coniques en y_j de poids $m_j/2$ (m_j est l'ordre du zéro y_j; cf. prop. 1, § 4). On a

$$\sum_j (m_j/2) = 2g - 2 = \sum_i \beta_i \quad \left(\beta_i = \frac{\theta_i}{2\pi} - 1\right).$$

Donc en particulier:

$$\sum_i \beta_i + \sum_j (-m_j/2) = 0.$$

Pour conclure, nous utiliserons le lemme ci-dessous:

LEMME. *Soit* S *une surface de Riemann close,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. *Supposons* $\sum_i \alpha_i = 0$. *Alors il existe une fonction harmonique* $h: S \to R$ *avec singularités logarithmiques de poids* α_i *en* $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. *Si* h *et* h' *sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Il existe donc une fonction harmonique $h: S \to R$ avec singularités logarithmiques de poids

$$\begin{cases} \beta_i \text{ en } x_i \, (i=1, ..., n) \\ -m_j/2 \text{ en } y_j \, (j=1, ..., k) \end{cases}$$

alors

$$ds^2 = e^{2h} ds_0^2$$

est la métrique cherchée (cf. prop. [3], § 1).

Ce raisonnement ne convient pas si $g = 0$, la sphère mérite donc des considérations particulières:

Par le théorème d'uniformisation de Riemann (cf. [6]), il n'existe (à isomorphisme près) qu'une structure conforme sur S^2. On peut donc poser $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Soit $a_i \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ la coordonnée de x_i, on peut supposer que $a_i \neq \infty$. Soit aussi $\beta_i = (\theta_i/2\pi) - 1$ alors on a

$$\sum_i \beta_i = -2$$

On pose:

$$ds^2 = \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2$$

Alors ds^2 est bien une métrique euclidienne ($\log \prod_i |z - a_i|^{\beta_i}$ est harmonique) et a_i est un point conique d'angle θ_i. Il ne reste plus qu'à vérifier que ∞ est un point régulier. Pour cela, on fait l'inversion $w = 1/z$ $\left(\text{donc } |dz|^2 = \dfrac{|dw|^2}{|w|^4}\right)$. On a

$$\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i} = \prod_i |w|^{-2\beta_i} |1 - wa_i|^{2\beta_i} = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}$$

(car $\sum_i \beta_i = -2$);

donc,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\prod_i |z - a_i|^{2\beta_i}\right) |dz|^2 = |w|^4 \prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i} |dw|^2/|w|^4 \\ &= \left(\prod_i |1 - wa_i|^{2\beta_i}\right) |dw|^2 \end{aligned}$$

est une métrique euclidienne régulière en $w = 0$ (c'est-à-dire $z = \infty$).

Ceci achève donc la preuve du théorème.