Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1986)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES
Autor: Troyanov, Marc
Anhang: Appendice
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55079

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

APPENDICE

Le but de cet appendice est de montrer comment le lemme utilisé dans la démonstration précédente découle du théorème de Hodge:

LEMME. *Soit* S *une surface de Riemann close,* $x_1, \ldots, x_n \in S$ *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. *Supposons* $\sum_i \alpha_i = 0$. *Alors il existe une fonction harmonique* $h: S \to \mathbf{R}$ *avec singularités logarithmiques de poids* α_i *en* $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Si h *et* h' *sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Avant de prouver ce lemme, quelques rappels sur la théorie de Hodge seront nécessaires:

Si S est une surface de Riemann, alors S est munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire d'un morphisme (linéaire) de fibré $J: TS \to TS$ tel que $J^2 = -I$ (identité). J peut être défini à l'aide d'une métrique conforme en posant $Y = JX$ si et seulement si $\{X; Y\}$ est une base orthonormée d'orientation positive, pour tout vecteur unité X.
Si ω est une 1-forme sur S, on définit $*\omega$ par:

$$*\omega(X) = -\omega(JX);$$

$*$ est également un morphisme de fibré $*: T^*S \to T^*S$ tel que $*^2 = -1$.

Si $z = x + iy$ est une coordonnée sur S, alors

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\frac{\partial}{\partial z}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$*dx = dy, \; *dy = -dx, \; *dz = -idz, \; *d\bar{z} = id\bar{z}.$$

Si f est une fonction, on a

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} i dz \wedge d\bar{z}.$$

On dit qu'une 1-forme est *harmonique* si $d\omega = d*\omega = 0$, donc ω est harmonique si et seulement si c'est localement la différentielle d'une fonction harmonique.

THÉORÈME DE HODGE. *Si* ω *est une* 1*-forme différentielle sur* S, *alors il existe* $u, v \in C^\infty(S)$ *et* ω_0 *une* 1*-forme harmonique tels que*

$$\omega = \omega_0 + du + *dv .$$

Nous ne prouvons pas ce théorème ici (cf. [6] ou [8]).

Preuve du lemme.

Unicité. Soient h et h' deux fonctions harmoniques avec les mêmes singularités logarithmiques, alors $h-h'$ est une fonction harmonique sans singularités, donc constante puisque S est compacte.

Existence. Par linéarité, il suffit de montrer que si $p, q \in S$ alors il existe $h: S \to R$, harmoniques avec singularités logarithmiques de poids -1 en p et $+1$ en q (la fonction voulue s'obtient ensuite comme combinaison linéaire de telles fonctions). On peut, pour la même raison, supposer que p et q appartiennent à un même domaine U d'une coordonnée z. Soit D un sous-domaine contenant p et q et tel que $\bar{D} \subset U$. Donnons-nous ensuite une fonction lisse $\chi: S \to R$ telle que

$$\chi|_D = 1 \quad \text{et} \quad \chi|_{S-U} = 0 .$$

On définit $f: U \to \mathbf{C}$ par $f(z) = \chi(z) \log\big((z-q)/(z-p)\big)$ et l'on étend à f à S tout entier en posant $f|_{S-U} = 0$. Considérons la 1-forme

$$\zeta = df - i*df = 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} .$$

Remarquons que $\zeta = 0$ sur $D \cup (S-U)$.

Le théorème de Hodge permet d'écrire

$$\zeta = \omega_0 + du + *dv$$

avec ω_0 harmonique. Posons ensuite

$$\omega = df - du = \omega_0 + i*df + *dv ;$$

alors ω *est fermée* car $d\omega = d(df - du) = 0$, ω *est cofermée* car

$$** = -1 \quad \text{donc} \quad d*\omega = d*\omega_0 - id^2 f - d^2 v = 0 .$$

Donc ω est harmonique.

Posons

$$h = \operatorname{Re}(f-u) = \frac{1}{2}\big((f-u) + (\bar{f}-\bar{u})\big) ;$$

alors h est harmonique puisque

$$d*dh = \frac{1}{2} d*\big(d(f-u)+d(\bar{f}-\bar{\omega})\big) = \frac{1}{2} d*(\omega+\bar{\omega}) = 0 .$$

h a clairement les singularités voulues. □

RÉFÉRENCES

[1] BERS, L. Quasi-Conformal Mapping and Teichmüller's theorems. In *Analytic function*, Princeton University Press, Princeton mathematical serie, No. 24.

[2] —— *Riemann surfaces.* Mimeographed Notes, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences (1958).

[3] CHERN, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc. 6* (1955), 771-782.

[4] GROMOV, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Textes mathématiques 1, CEDIC/Fernand-Nathan, 1981.

[5] HUBBARD, J. and H. MASUR. Quadratic differentials and foliations. *Acta. Math. 142, 3-4* (1979), 221-274.

[6] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison Wesley, 1957.

[7] STREBEL, K. *Quadratic differentials.* Springer Verlag, 1984.

[8] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate text in Mathematics 94, Springer Verlag.

(Reçu le 12 décembre 1984)

Marc Troyanov

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24