Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

Kapitel: 2. Paradoxes relatifs à une algèbre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\mu(X) = 1\,,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset\,,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe } \gamma : S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}\,.$$

Nous désignons par $l^\infty(X)$ l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur X avec la norme de la convergence uniforme, et par $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ l'adhérence dans $l^\infty(X)$ du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée $\mathfrak{G}$-invariante sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, forme que nous notons aussi μ. (Rappel de vocabulaire: μ est positive si $\mu(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à valeurs positives ou nulles, μ est normalisée si μ prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et μ est $\mathfrak{G}$-invariante si $\mu(f\gamma) = \mu(f)$ pour tout $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et pour tout $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$ à support dans T.) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier $p \geqslant 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_p$ l'est. Plus généralement, si $\mathfrak{G}$ agit sur $(X, \mathfrak{B})$ et si $U \in \mathfrak{B}$ est une grande partie de X, alors $\mathfrak{G}$ est moyennable si et seulement si $\mathfrak{G}_U$ est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

2. Paradoxes relatifs à une algèbre

On considère à nouveau un ensemble non vide X, une algèbre $\mathfrak{B}$ de parties de X, et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$.

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable;*

ii) $\mathfrak{G}$ *est virtuellement paradoxal.*

Preuve. S'il existe un entier $p \geqslant 1$ avec $\mathfrak{G}_p$ faiblement paradoxal, il est évident que $\mathfrak{G}_p$ n'est pas moyennable, et par suite $\mathfrak{G}$ n'est pas moyennable; donc ii) implique i).

Notons $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ le sous-espace vectoriel de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ engendré par les différences $\chi - \chi\gamma$, avec $\gamma : S \to T$ dans $\mathfrak{G}$ et χ la fonction caractéristique de T. Notons C le cône convexe ouvert de $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ formé des fonctions f

pour lesquelles $\inf_{x \in X} f(x) > 0$. Une moyenne $\mathfrak{G}$-invariante sur $(X, \mathfrak{B})$ est une forme linéaire continue μ sur $l^\infty(X, \mathfrak{B})$, telle que la restriction $\mu \mid d^\infty(X, \mathfrak{B})$ soit nulle et telle que la restriction $\mu \mid C$ soit à valeurs strictement positives. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que la condition i) est équivalente à $d^\infty(X, \mathfrak{B}) \cap C \neq \emptyset$. On suppose donc que $d^\infty(X, \mathfrak{B})$ rencontre C, et il s'agit de montrer que $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal pour p assez grand.

Comme C est ouvert, il existe des éléments $\gamma_j : S_j \to T_j$ dans $\mathfrak{G}$ et des nombres rationnels n_j tels que la fonction

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j(\chi_j - \chi_j\gamma_j)$$

soit dans C, où χ_j désigne la fonction caractéristique de T_j. En remplaçant quand il le faut γ_j par γ_j^{-1}, on peut rendre chaque n_j positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les n_j entiers et la fonction minorée par la constante 1. En répétant les γ_j, on peut enfin supposer tous les n_j égaux à 1. On a donc

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j\gamma_j \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j$$

pour un entier n convenable. Notons $\chi'_j = 1 - \chi_j\gamma_j$ la fonction caractéristique de $X - S_j$ et ajoutons les χ'_j à l'inégalité précédente; comme $\chi_j \leqslant 1$ et $\chi'_j \leqslant 1$ on obtient

$$n \leqslant f = \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_j + \chi'_j) \leqslant 2n - 2 .$$

On définit encore

$$R_f = \{(x, q) \in X_{2n-2} \mid q \leqslant f(x)\}$$

qui est dans $\mathfrak{B}_{2n-2}$ car c'est le sous-graphe de la fonction $\mathfrak{B}$-mesurable f, et on note $\pi_2 : R_f \to X$ la projection canonique. L'inégalité $n \leqslant f$ implique $X_n \subset R_f$.

Soit $\Phi : X_{n-1} \to X_{2n-2}$ l'application injective définie par

$$\Phi(x, j) = (\gamma_j x, 2j-1) \quad \text{si} \quad x \in S_j \quad \text{et} \quad \Phi(x, j) = (x, 2j) \quad \text{si} \quad x \notin S_j .$$

Notons U l'image de Φ et $\pi_1 : U \to X$ la projection canonique. Pour tout $y \in X$, le cardinal de $\pi_1^{-1}(y)$ est précisément $f(y)$. Vu le lemme qui suit, il existe $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & X_n \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
X_{2n-2} \supset X_{n-1} \arrow[r, "\Phi"] & U \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & R_f \arrow[d, "\pi_2"] & \subset X_{2n-2} \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

commute.

Soit γ la restriction à X_n de $\Phi^{-1}\Psi^{-1}$, qui est dans $\mathfrak{G}_n$. Soit $\gamma_1 \in \mathfrak{G}_n$ l'itéré γ^n de γ; on a $\gamma(X_n) \subset X_{n-1}$, de sorte que les ensembles $X_n - X_{n-1}$, $\gamma(X_n - X_{n-1}), \ldots, \gamma^{n-1}(X_n - X_{n-1}), \gamma^n(X_n)$, sont disjoints. Définissons $\gamma_2 \in \mathfrak{G}_n$ par $\gamma_2(x, q) = \gamma^{q-1}(x, n)$. Alors γ_1 et γ_2 ont des buts disjoints, et $\mathfrak{G}_n$ est bien faiblement paradoxal. □

L'existence de $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$ invoquée dans la preuve se justifie comme suit:

LEMME 2. *On considère un entier* $p \geqslant 1$ *et deux parties* U_1, U_2 *de* X_p, *dans* $\mathfrak{B}_p$. *On note* $\pi_j : U_j \to X$ *la restriction à* U_j *de la projection canonique* $X_p = X \times I_p \to X (j = 1, 2)$, *et on note* $\mathfrak{C}_p$ *le pseudogroupe de transformations de* $(X_p, \mathfrak{B}_p)$ *engendré par les applications* $\mathrm{id}_X \times \sigma$ *où* σ *est une bijection de* I_p.

Si les cardinaux de $\pi_1^{-1}(x)$ *et* $\pi_2^{-1}(x)$ *sont égaux pour tout* $x \in X$, *alors il existe* $\Psi \in \mathfrak{C}_p$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & U_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

commute.

Preuve. Il suffit de montrer le lemme lorsque U_2 est tel que $(x, q) \in U_2$ implique $(x, t) \in U_2$ pour $t = 1, 2, \ldots, q$ (cas d'un sous-graphe). Toute bijection $U_1 \to U_2$ faisant commuter le diagramme peut s'écrire $(x, q) \mapsto (x, r(x, q))$. Il en existe une, unique, pour laquelle toutes les fonctions $q \mapsto r(x, q)$ sont croissantes, x étant dans l'image de π_1; on la note Ψ.

Pour tout $t \in \{1, \ldots, p\}$, l'ensemble $S_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U_1\}$ est dans $\mathfrak{B}$, donc sa fonction caractéristique χ_t est $\mathfrak{B}$-mesurable. Comme $r(x, q) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant q} \chi_t(x)$, la fonction r est $\mathfrak{B}_p$-mesurable. Par suite l'application Ψ est $\mathfrak{B}_p$-mesurable.

Etant donnés $q, s \in I_p$, l'ensemble

$$A_{q,s} = \{x \in X \mid (x, q) \in U_1 \text{ et } \Psi(x, q) = (x, s)\}$$

est donc dans $\mathfrak{B}$. Si $x \in A_{q,s}$, alors $\Psi(x, q) = (x, s)$. Ceci étant vrai pour toute paire (q, s), il en résulte que $\Psi \in \mathfrak{C}_p$. □

Le critère suivant peut faciliter la vérification qu'un pseudogroupe donné est faiblement (ou virtuellement) paradoxal. Il est du même type que, par exemple, le théorème 2.7 de [Sh].

PROPOSITION 3. *Si* $\mathfrak{G}$ *est un pseudogroupe de transformations d'un espace* $(X, \mathfrak{B})$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, ..., S_{n-1}, S_n, T_1, ..., T_{n-1}$ *dans* $\mathfrak{B}$ *avec*
— *les* S_j *sont disjoints deux à deux*
— S_n *est grand*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, ..., n-1)$
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k\right)$.

iii) *Il existe* $\gamma: X \to R$ *dans* $\mathfrak{G}$ *tel que* $X - R$ *soit grand.*

Preuve. L'implication i) ⇒ ii) est banale (avec $n=2$, $T=X$ et S_1, S_2 les buts des bijections de la définition).

Si ii) est vrai, on peut supposer de plus les T_k disjoints deux à deux: sinon, on considère

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2 - T_1, ..., T'_{n-1} = T_{n-1} - (T_1 \cup ... \cup T_{n-2}).$$

Supposons la condition ii) vérifiée, avec les T_k disjoints deux à deux. Posons $T = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k$, et choisissons dans $\mathfrak{G}$ une bijection α de source T et de but $S' \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n-1} S_j$, obtenue en recollant des éléments $T_j \to S'_j \subset S_j$. Posons $R = S' \cup (X - T)$, et notons $\gamma: X \to R$ la bijection qui coïncide avec α sur T et avec l'identité sur $X - T$. La condition iii) est vérifiée, car $X - R$ contient la grande partie S_n.

Supposons enfin la condition iii) vérifiée. Comme $X - R$ est grand, il existe dans $\mathfrak{G}$ des éléments $\delta_j: S_j \to T_j$ avec $S_j \subset X - R$ et les T_j disjoints deux à deux $(j=1, ..., N)$, tels que $X = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant N} T_j$. Les ensembles

$X - R, \gamma(X-R), ..., \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, ..., N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. □

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1, 2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une σ-algèbre. Alors* $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal si et seulement si* $\mathfrak{G}$ *est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe* $T, T' \in \mathfrak{B}$ *avec* $T \cap T' = \emptyset$ *et* $\gamma: X \to T$ *dans* $\mathfrak{G}$, *alors il existe* $\gamma'': X \to X - T'$ *dans* $\mathfrak{G}$.

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma' x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma'' x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. □

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. □