Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

Kapitel: 3. Paradoxes relatifs à une -algèbre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$X - R, \gamma(X-R), ..., \gamma^{N-1}(X-R), \gamma^N(X)$ sont disjoints deux à deux. Posons $\gamma' = \gamma^N$, et soit γ'' la bijection de source X qui coïncide avec $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$ sur T_j pour $j = 1, ..., N$. Comme les buts de γ' et γ'' sont disjoints, $\mathfrak{G}$ est faiblement paradoxal. □

Soient r et p des entiers avec $r \geqslant p \geqslant 1$. Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si $\mathfrak{G}_p$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}_r$ l'est aussi. Plus généralement, soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations de $(X, \mathfrak{B})$ et soit $U \in \mathfrak{B}$ une grande partie de X; si $\mathfrak{G}_U$ est faiblement paradoxal, alors $\mathfrak{G}$ l'est aussi.

3. Paradoxes relatifs à une σ-algèbre

Un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de $(X, \mathfrak{B})$, comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe X_1, X_2 avec $X = X_1 \coprod X_2$ et $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ $(j=1, 2)$, ce que nous abrégeons par $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$.

Proposition 4. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une σ-algèbre. Alors* $\mathfrak{G}$ *est faiblement paradoxal si et seulement si* $\mathfrak{G}$ *est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que $\mathfrak{G}$ est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si $\mathfrak{B}$ est stable par réunions infinies dénombrables.

Lemme 5. *S'il existe* $T, T' \in \mathfrak{B}$ *avec* $T \cap T' = \emptyset$ *et* $\gamma: X \to T$ *dans* $\mathfrak{G}$, *alors il existe* $\gamma'': X \to X - T'$ *dans* $\mathfrak{G}$.

Preuve. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 0} \gamma^k(T')$, de sorte que $\gamma(U) = U - T'$. On définit $\gamma'' \in \mathfrak{G}$ de source X par $\gamma' x = x$ si $x \in X - U$ et $\gamma'' x = \gamma x$ si $x \in U$. Le but de γ'' est $(X-U) \cup \gamma(U) = X - T'$. □

Preuve de la proposition. Supposons $\mathfrak{G}$ faiblement paradoxal: il existe deux éléments $\gamma: X \to T$ et $\gamma': X \to T'$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \cap T' = \emptyset$. Alors γ' et l'élément γ'' du lemme 5 sont des bijections dans $\mathfrak{G}$ ayant X pour source et dont les buts forment une partition de X. □

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \to R$ *et* $\delta': S' \to R'$ *dans* $\mathfrak{G}$ *avec* $R \subset S'$ *et* $R' \subset S$, *alors* $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'': S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une* σ-*algèbre. Soient* $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ *des grandes parties avec* $U \subset U'$ *et* $V \subset V'$. *Si* $\mathfrak{G}_U$ *et* $\mathfrak{G}_V$ *sont paradoxaux, alors* $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble* X, *deux partitions* $X = S \coprod T = U \coprod V$, *ainsi que deux bijections* $\varphi: S \to T$ *et* $\psi: U \to V$. *Alors il existe deux partitions*