Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES

Autor: de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

Kapitel: 4. Paradoxes relatifs à l'algèbre de toutes les parties

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55082

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Lorsque $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que $\mathfrak{G}$ est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire: $\mathfrak{G}_p$ est paradoxal pour p assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

S'il existe $\delta: S \to R$ *et* $\delta': S' \to R'$ *dans* $\mathfrak{G}$ *avec* $R \subset S'$ *et* $R' \subset S$, *alors* $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Posons $\gamma = \delta'\delta: S \to T$ et $T' = S - R'$; on a $T \subset R' \subset S$. Par le lemme 5 (appliqué dans S), il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément $\gamma'': S \to R'$. Par suite $(\delta')^{-1}\gamma'': S \to S'$ est une équivalence dans $\mathfrak{G}$. □

COROLLAIRE 7. *On suppose que* $\mathfrak{B}$ *est une* σ-*algèbre. Soient* $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$ *des grandes parties avec* $U \subset U'$ *et* $V \subset V'$. *Si* $\mathfrak{G}_U$ *et* $\mathfrak{G}_V$ *sont paradoxaux, alors* $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$. Comme U est grand, il existe un entier N et une bijection $\alpha: X \times \{1\} \to U_1$ dans $\mathfrak{G}_N$ avec $U_1 \subset U \times I_N$. Comme $\mathfrak{G}_U$ est paradoxal, il existe $\beta: U \times I_N \to U \times \{1\}$ dans $\mathfrak{G}_N$. La composition de α et β fournit une bijection $\gamma: X \to T$ de $\mathfrak{G}$ avec $T \subset U \subset U'$. On conclut en utilisant le lemme 5 (avec $T' = X - U'$). □

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire U et V, car U est grand dans U', et par suite $\mathfrak{G}_{U'}$ est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble X et un pseudogroupe $\mathfrak{G}$ de transformations de X, ou plus précisément de $(X, \mathfrak{P}(X))$. L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble* X, *deux partitions* $X = S \coprod T = U \coprod V$, *ainsi que deux bijections* $\varphi: S \to T$ *et* $\psi: U \to V$. *Alors il existe deux partitions*

$$S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} S_j, \quad V = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant 4} V_j,$$

avec

$$V_1 = S_1, \quad V_2 = \varphi(S_2), \quad V_3 = \psi(S_3), \quad V_4 = \psi\varphi(S_4).$$

Preuve. Considérons la bijection de X sur X qui coïncide avec φ sur S et avec φ^{-1} sur T; c'est une transformation de X sans point fixe et d'ordre 2, que nous notons encore φ. On étend de même ψ. Si $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ désigne le groupe diédral infini, φ et ψ définissent une action de G sur X.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par $\psi\varphi$, qui est cyclique infini et normal dans G; soit $Y = X/G_0$ l'espace des orbites. Alors φ et ψ induisent sur Y la même transformation, que nous notons ρ et qui satisfait $\rho^2 = \mathrm{id}_Y$. Cette transformation est sans point fixe: sinon, il existerait $x \in X$ et $n \in \mathbf{Z}$ avec $\varphi(x) = (\psi\varphi)^n(x)$; or $\varphi(\psi\varphi)^n$ est conjugué soit à φ (si n est pair) soit à ψ (si n est impair), donc n'a pas de point fixe par hypothèse sur φ et ψ. Vu l'axiome du choix, il existe une partition $Y = Y' \coprod Y''$ telle que ρ échange Y' et Y''. Si $X = X' \coprod X''$ est la partition image inverse par la projection canonique $X \to Y$, alors X' et X'' sont échangés par φ et par ψ.

La bijection $\alpha: S \to X'$ définie par $\alpha(x) \in \{x, \varphi(x)\}$ montre que S et X' sont équivalents modulo le pseudogroupe engendré par φ, ce que nous écrivons $S \equiv X' \pmod{\varphi}$. De même $X' \equiv V \pmod{\psi}$. Par suite $S \equiv V \pmod{G}$. Plus précisément, on pose

$$S_1 = S \cap X' \cap V = V_1$$

$$S_2 = S \cap X'' \cap \varphi(V) \qquad V_2 = T \cap X' \cap V$$

$$S_3 = S \cap X' \cap U \qquad V_3 = \psi(S) \cap X'' \cap V$$

$$S_4 = S \cap X'' \cap \varphi(U) \qquad V_4 = \psi(T) \cap X'' \cap V$$

et on obtient l'affirmation du lemme. □

Remarques.

1) Le nombre 4 apparaissant dans le lemme 8 est le minimum possible [U].

2) La preuve ci-dessus est une variante de celle de Kuratowski. Le lemme résulte d'un travail de König datant de 1916; voir le § 5 de [Kö].

3) La preuve montre ceci: étant données deux actions sans point fixe du groupe à deux éléments sur X, il existe un domaine fondamental *commun*

$$X' = S_1 \cup \varphi(S_2) \cup S_3 \cup \varphi(S_4) = V_1 \cup V_2 \cup \psi^{-1}(V_3) \cup \psi^{-1}(V_4)$$

L'analogue mesurable de l'affirmation de la remarque 3 n'est pas correct, comme le montre l'exemple suivant.

On considère le cercle unité $\mathbf{S}^1$ du plan complexe et deux réflexions φ, ψ de $\mathbf{S}^1$ relatives à deux diamètres dont l'angle est un multiple irrationnel de π. Soit X l'espace $\mathbf{S}^1$ privé de l'ensemble dénombrable constitué par les points fixes des transformations $((\varphi\psi)^n\varphi)_{n\in\mathbf{Z}}$; on munit X de la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Il n'existe pas de sous-ensemble mesurable $X' \subset X$ qui soit un domaine fondamental pour $\{\mathrm{id}_X, \varphi\}$ et $\{\mathrm{id}_X, \psi\}$: en effet, un tel X' serait invariant par la transformation ergodique $\psi\varphi$, ce qui est absurde, car φ et ψ préservent la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 9. *Si $\mathfrak{G}$ est un pseudogroupe de transformations de X relatif à la σ-algèbre de toutes les parties, alors $\mathfrak{G}$ est virtuellement paradoxal si et seulement si $\mathfrak{G}$ est paradoxal.*

Preuve. On suppose $\mathfrak{G}$ virtuellement paradoxal, c'est-à-dire $\mathfrak{G}_p$ paradoxal pour un entier convenable p. En remplaçant au besoin p par un entier plus grand, on se ramène au cas d'une puissance de 2. Modulo une induction évidente, il suffit donc de considérer le cas $p = 2$.

L'hypothèse que X_2 est paradoxal signifie qu'il existe une partition $X_2 = U \coprod V$ avec $U \equiv X_2 \pmod{\mathfrak{G}_2}$ et $V \equiv X_2 \pmod{\mathfrak{G}_2}$. En posant $S = X \times \{1\}$ et $T = X \times \{2\}$, on obtient évidemment $X_2 = S \coprod T$ avec $S \equiv T \pmod{\mathfrak{G}_2}$. Le lemme 8 montre que $S \equiv V \pmod{\mathfrak{G}_2}$, donc que $X_2 \equiv X \pmod{\mathfrak{G}_2}$. Cette dernière équivalence signifie précisément que X est paradoxal. □

Notons que notre proposition 9 résulte immédiatement du théorème 11 et du corollaire 12 de [BT].

COROLLAIRE 10. *Soit $\mathfrak{G}$ comme à la proposition 9. Si $\mathfrak{G}$ est paradoxal, deux grandes parties S, S' de X sont toujours équivalentes modulo $\mathfrak{G}$.*

Preuve. Vu le corollaire 7, il suffit de montrer que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal pour toute grande partie S de X.

Comme S est grand, il existe un entier N tel que $X \times \{1\}$ soit équivalent modulo $\mathfrak{G}_N$ à une partie de $S \times I_N = S_N$. Comme $\mathfrak{G}$ est paradoxal, $\mathfrak{G}_{S_N}$ l'est aussi (dernière remarque de la section 2); en d'autres termes, $\mathfrak{G}_S$ est virtuellement paradoxal. La proposition 9 montre que $\mathfrak{G}_S$ est paradoxal. □

On a donc:

THÉORÈME 11. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un pseudogroupe de transformations d'un ensemble non vide* X, *relatif à l'algèbre* $\mathfrak{P}(X)$ *de toutes les parties de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathfrak{G}$ *n'est pas moyennable.*

ii) *Il existe un entier* $n \geqslant 2$ *et des parties* $S_1, \ldots, S_{n-1}, S_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ *de* X *avec*
— *les* S_j *sont équivalents deux à deux,*
— S_n *est grand,*
— T_k *est équivalent à une partie de* $S_k (k=1, \ldots, n-1)$,
— $\left(\coprod_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j \right) \subset \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} T_k \right)$.

iii) $\mathfrak{G}$ *est (fortement) paradoxal: il existe une partition* $X = X_1 \coprod X_2$ *avec* $X_j \equiv X (\mathrm{mod}\ \mathfrak{G})$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors deux grandes parties quelconques de X *sont équivalentes modulo* $\mathfrak{G}$.

On connaît d'autres conditions équivalentes: voir par exemple [R1] pour des conditions à la Følner. Voir aussi le corollaire 3.5 de [R2]: toute action d'un groupe de génération finie et de croissance sous-exponentielle est moyennable.

5. UN DÉVELOPPEMENT ET QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

Soit $\mathfrak{G}$ un pseudogroupe de transformations d'un espace $(X, \mathfrak{B})$ donné avec un sous-ensemble non vide $U \in \mathfrak{B}$. (Le cas étudié plus haut correspond à $U = X$.) Rappelons que nous notons $\mathfrak{G}_U$ le pseudogroupe de transformations de $(U, \mathfrak{B}_U)$ défini par $\mathfrak{G}$. On appelle *moyenne invariante* pour le système $(X, U, \mathfrak{B}, \mathfrak{G})$ une fonction $\mu: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ telle que

$$\mu(U) = 1,$$
$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour} \quad S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$
$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe} \quad \gamma: S \to T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

La notion est due à von Neumann [vN].