§1. DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES DE LA MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ensuite, au § 2, nous énumérons quelques *conditions suffisantes* pour qu'un groupe soit intérieurement moyennable (Γ moyennable, Γ faiblement commutatif, ...) ou ne le soit pas (conséquence de la propriété T, existence de sous-groupes libres convenables, ...). Nous étudions aussi le comportement de la moyennabilité intérieure par *extensions* et *produits semi-directs.*

Enfin, le troisième paragraphe est de nature plus *géométrique*, et nous y indiquons de multiples exemples de groupes non intérieurement moyennables: sous-groupes non presque résolubles de $PSL(2, \mathbf{C})$, produits libres, et variantes.

Beaucoup des résultats qui suivent sont déjà connus. Nous les avons répétés en espérant que notre texte puisse être pris comme une *introduction* au sujet. Dans le même but, nous avons systématiquement omis de considérer des groupes munis de topologies non triviales; pour ceci, voir [Pi] et [LR].

Nous remercions chaleureusement G. Skandalis pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail et pour les nombreuses améliorations qu'il nous a suggérées.

§ 1. Définitions équivalentes de la moyennabilité intérieure

On se donne un groupe (discret) Γ, non réduit à un élément. Pour simplifier la suite, nous supposons Γ dénombrable; mais l'usage de suites généralisées nous permettrait de généraliser sans peine à des groupes plus grands.

Une *moyenne intérieurement invariante* sur Γ est une mesure positive finiment additive de masse totale 1 sur $\Gamma-\{1\}$ qui est invariante par automorphismes intérieurs. On peut envisager une telle moyenne comme une application définie sur les sous-ensembles de $\Gamma-\{1\}$ à valeurs dans $[0, 1]$, ou comme une forme linéaire positive normalisée sur l'espace de Banach $l^\infty(\Gamma-\{1\})$. (Pour l'équivalence, voir [HeS], théorème 20.30.) Nous voulons montrer dans ce paragraphe que Γ possède une moyenne intérieurement invariante si et seulement s'il possède certaines autres propriétés, avant l'énoncé desquelles nous rappelons quelques faits et fixons nos notations.

Le groupe Γ opère dans l'espace de Hilbert $l^2(\Gamma)$ par les *représentations* régulières gauche λ et droite ρ, ainsi que par la représentation adjointe α:

$$\begin{aligned}
(\lambda(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}h)\,,\\
(\rho(g)\xi)(h) &= \xi(hg)\,,\\
(\alpha(g)\xi)(h) &= \xi(g^{-1}hg)\,, \quad g\in\Gamma\,, \quad \xi\in l^2(\Gamma)\,, \quad h\in\Gamma\,.
\end{aligned}$$

On a $\alpha(g) = \lambda(g)\rho(g) = \rho(g)\lambda(g)$ pour tout $g \in \Gamma$. Nous notons δ la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans Γ, et β la restriction de α à l'orthogonal $H_\beta = l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$ de δ dans $l^2(\Gamma)$. On a donc $\alpha = \beta \oplus \varepsilon$, où ε désigne la représentation triviale de Γ dans $\mathbf{C}$.

L'espace de Banach $l^1(\Gamma)$ des fonctions sommables sur Γ s'identifie naturellement à un sous-espace (non fermé si Γ est infini) de $l^2(\Gamma)$ invariant par α. Nous notons $l^1(\Gamma)^+$ le cône des fonctions $\eta \in l^1(\Gamma)$ avec $\eta(g) \geqslant 0$ pour tout $g \in \Gamma$.

Nous écrivons $|S|$ le cardinal d'un ensemble fini S et $S\Delta T$ la différence symétrique de deux sous-ensembles S, T de Γ.

En vue de la condition (R) ci-dessous, notons que Γ est à *classes de conjugaison infinies*, ou en abrégé CCI, si et seulement si β ne contient pas ε (au sens fort). En effet, si $\Gamma - \{1\}$ contient une classe de conjugaison finie F, alors H_β contient un vecteur non nul fixé par $\beta(\Gamma)$, à savoir la fonction caractéristique de F. Réciproquement, si le vecteur non nul ξ de H_β est fixé par $\beta(\Gamma)$, alors l'ensemble fini $\{g \in \Gamma \mid |\xi(g)| > \frac{1}{n}\}$ est non vide pour un entier n assez grand, et il est réunion de classes de conjugaison.

Nous écrivons P_δ la projection orthogonale de $l^2(\Gamma)$ sur $\mathbf{C}\delta$. Si $M, \ldots, N$ sont des ensembles d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, alors $C^*(M, \ldots, N)$ désigne la C^*-algèbre engendrée par la réunion $M \cup \ldots \cup N$ dans l'algèbre d'opérateurs $L(l^2(\Gamma))$.

On dit qu'une bijection $\varphi : S \to T$ entre sous-ensembles de Γ est *intérieure par morceaux* s'il existe un sous-ensemble fini $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \Gamma$ avec $\varphi(g) \in \{f_1 g f_1^{-1}, \ldots, f_k g f_k^{-1}\}$ pour tout $g \in S$, c'est-à-dire s'il existe une partition $S = \coprod_{1 \leqslant j \leqslant k} S_j$ avec $\varphi(g) = f_j g f_j^{-1}$ pour $g \in S_j$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$.

THÉORÈME 1. *Si Γ est un groupe dénombrable, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(M) *Il existe une moyenne intérieurement invariante sur Γ.*

(D_1) *Il existe une suite $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+$ avec*

1°) $\eta_n(1) = 0$ *et* $\|\eta_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\eta_n - \eta_n\|_1 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(D_2) *Il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^2(\Gamma)$ avec*

1°) $\xi_n(1) = 0$ *et* $\|\xi_n\|_2 = 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$,

2°) $\lim_{n \to \infty} \|\alpha(g)\xi_n - \xi_n\|_2 = 0$ *pour tout* $g \in G$.

(*F*) *Il existe une suite* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ *de sous-ensembles finis non vides de* $\Gamma - \{1\}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} |(gF_ng^{-1})\Delta F_n \| F_n|^{-1} = 0$ *pour tout* $g \in \Gamma$.

(*R*) *La représentation* β *de* Γ *contient faiblement* ε.

(*P*) *On a* $P_\delta \notin C^*(\alpha(\Gamma))$.

(*Ta*) *Il n'existe pas de partition* $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ *qui soit paradoxale, c'est-à-dire telle que la partie* S_j *soit donnée avec une bijection* $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ *intérieure par morceaux* $(j=1, 2)$.

Preuve. Nous établissons les équivalences

$$\begin{array}{ccccc} (M) & \overset{(1)}{\Leftrightarrow} & (D_1) & \overset{(2)}{\Leftrightarrow} & (D_2) \\ (3)\Updownarrow & & (4)\Updownarrow & & (5)\Updownarrow \\ (Ta) & & (F) & & (R) \overset{(6)}{\Leftrightarrow} (P)\,. \end{array}$$

D'autres cheminements sont possibles. Par exemple, l'implication $(D_2) \Rightarrow (Ta)$ se montre comme le « lemme des 14 ε »: voir le lemme 6.2.2 de [MvN] ou le lemme 4.3.3 de [Sa]. Voir aussi [Pa] pour $(P) \Rightarrow (M)$.

(1) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (D_1)$. L'équivalence est due à Effros [E], qui reprend un argument maintenant bien connu de Day (théorème 1 du N° 5 dans [Da] — voir aussi [Gr], § 2.4 et [Ey], § III). Le fait essentiel ici est que l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans $l^1(\Gamma-\{1\})^+$ est dense dans l'ensemble des moyennes (= formes linéaires positives normalisées) sur $l^\infty(\Gamma-\{1\})$ pour la topologie faible $\sigma(l^\infty(\Gamma-\{1\})^*, l^\infty(\Gamma-\{1\}))$.

(2) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (D_2)$. Si $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ est comme dans (D_1), on pose $\xi_n(g) = (\eta_n(g))^{1/2}$ et on obtient (D_2). Réciproquement, si $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est comme dans (D_2), on pose $\eta_n(g) = |\xi_n(g)|^2$ et on obtient (D_1). Les conditions (2°) résultent de l'inégalité de Hölder et des inégalités suivantes, valables pour $a, b, p \in \mathbf{R}$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ (ici $p=2$):

$$|a-b|^p \leqslant |a^p-b^p| \leqslant p\,|a-b\,\|\,a^{p-1} + b^{p-1}|\,.$$

On laisse au lecteur le plaisir de remplacer (D_2) par (D_p) dans l'énoncé.

(3) Preuve de $(M) \Leftrightarrow (Ta)$. Pour l'application $(M) \Rightarrow (Ta)$, on montre banalement la contraposée. Supposons en effet qu'il existe une partition $\Gamma - \{1\} = S_1 \coprod S_2$ et des bijections $\varphi_j : \Gamma - \{1\} \to S_j$ intérieures par morceaux

($j=1, 2$). S'il existait une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ, on aurait $\mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_j)$, et $1 = \mu(\Gamma-\{1\}) = \mu(S_1) + \mu(S_2) = 2$ qui est absurde. Donc la condition (M) n'est pas vérifiée.

L'implication $(Ta) \Rightarrow (M)$ est un cas particulier d'un résultat de Tarski (théorème 16.12 (ii) de [Ta]) pour lequel nous renvoyons à une rédaction expositoire motivée par le présent travail [HaS].

La négation de la condition (Ta) admet plusieurs variantes. Nous renvoyons à [HaS] pour certaines d'entre elles, mais en citons néanmoins une qu'on peut dégager de [MvN].

(Ta') Il existe $S \subset \Gamma - \{1\}$, un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, ..., b_{n-1} \in \Gamma$ avec les $a_j S a_j^{-1}$ disjoints deux à deux ($1 \leqslant j \leqslant n$) et avec $\Gamma - \{1\} = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n-1} b_k S b_k^{-1}$.

(4) Preuve de $(D_1) \Leftrightarrow (F)$. Il est évident que (F) implique (D_1). En effet, si $(F_n)_{n \geqslant 1}$ est comme dans (F), on pose $\eta_n = |F_n|^{-1}\chi_n$ où χ_n est la fonction caractéristique de F_n, de sorte que $\| \alpha(g)\eta_n - \eta_n \|_1 = |gF_n g^{-1} \Delta F_n| \, |F_n|^{-1}$ pour tout $g \in \Gamma$.

L'implication $(D_1) \Rightarrow (F)$ suit sa « variante moyennable » due à Følner [Fo], simplifiée par Namioka [Na], et reformulée par Connes (N° 2.1 de [C1]). Répétons ceci:

LEMME. *Pour tout nombre réel* $a > 0$, *notons* $E_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *la fonction caractéristique de* $]a, \infty[$. *Soit* S *un ensemble et soit* $l^1(S)^+$ *le cône des fonctions sommables de* S *dans* $\mathbf{R}_+$.

On se donne $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_k \in l^1(S)^+$ *avec* $\eta_0 \neq 0$ *et* $\varepsilon > 0$. *Si* $\| \eta_j - \eta_0 \|_1 < \varepsilon \| \eta_0 \|_1$ *pour* $j = 1, ..., k$, *alors il existe* $a > 0$ *avec* $E_a(\eta_0) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \leqslant \varepsilon \| E_a(\eta_0) \|_1 .$$

Preuve du lemme. On a pour $t, t' \in \mathbf{R}_+$

$$\int_0^\infty | E_a(t) - E_a(t') | \, da = | t - t' |$$

donc pour $\eta, \eta' \in l^1(S)^+$

$$\int_0^\infty \| E_a(\eta) - E_a(\eta') \|_1 \, da = \| \eta - \eta' \|_1$$

par Fubini. Par suite

$$\int_0^\infty \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \| E_a(\eta_j) - E_a(\eta_0) \|_1 \, da = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \| \eta_j - \eta_0 \|_1 \leqslant \varepsilon \| \eta_0 \|_1$$
$$= \varepsilon \int_0^\infty \| E_a(\eta_0) \|_1 \, da$$

et il existe $a > 0$ avec les propriétés voulues. □

Preuve de $(D_1) \Rightarrow (F)$. On se donne $g_1, ..., g_k \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$, et on choisit δ avec $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{k}$. Si Γ vérifie (D_1), il existe un vecteur unité $\eta \in l^1(\Gamma - \{1\})^+$ avec $\| \alpha(g_j)\eta - \eta \|_1 < \delta$ pour $j = 1, ..., k$. Vu le lemme (appliqué à $\eta_0 = \eta$ et $\eta_j = \alpha(g_j)\eta$), il existe $a > 0$ avec $E_a(\eta) \neq 0$ et

$$\| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 \leqslant k\delta \| E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon \| E_a(\eta) \|_1$$

pour $j = 1, ..., k$. Soit $F = \eta^{-1}(]a, \infty[) \subset \Gamma - \{1\}$ le support de $E_a(\eta)$, qui est non vide car $E_a(\eta) \neq 0$. Le support de $E_a(\alpha(g_j)\eta)$ est $g_j F g_j^{-1}$ et l'inégalité précédente implique

$$| g_j F g_j^{-1} \Delta F | = \| E_a(\alpha(g_j)\eta) - E_a(\eta) \|_1 < \varepsilon | F |$$

pour $j = 1, ..., k$. On obtient une suite de Følner en variant le sous-ensemble fini $\{g_1, ..., g_k\}$ de Γ et le nombre ε.

Pour un résultat plus général, voir [Ro].

(5) Preuve de $(D_2) \Leftrightarrow (R)$. Cette équivalence n'est qu'une reformulation. En effet, (R) signifie qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 dans $l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$ telle que $\lim_{n\to\infty} (\beta(g)\xi_n | \xi_n) = 1$ pour tout $g \in \Gamma$. Et ceci s'écrit aussi $\lim_{n\to\infty} \| \beta(g)\xi_n - \xi_n \|_2 = 0$, vu l'identité $\| \xi' - \xi \|_2^2 = 2 - 2Re(\xi' | \xi)$ pour deux vecteurs ξ' et ξ de norme unité.

(6) Preuve de $(R) \Leftrightarrow (P)$. D'abord une observation générale: soit $\sigma : A \to L(H_\sigma)$ une représentation d'une C^*-algèbre A contenant faiblement une représentation $\pi : A \to L(H_\pi)$, et soit P la projection orthogonale de $H_\sigma \oplus H_\pi$ sur H_π; alors $P \notin (\sigma \oplus \pi)(A)$.

En effet, s'il existait $a \in A$ avec $P = (\sigma \oplus \pi)(a)$, on aurait $\sigma(a) = 0$ et $\pi(a) = 1$, en contradiction avec l'hypothèse de contenance faible $\mathrm{Ker}(\sigma) \subset \mathrm{Ker}(\pi)$. Pour l'équivalence entre cette définition de la contenance faible et celle utilisée ci-dessus en (5), voir si nécessaire les N°s 3.4.4-5 et 18.1.3-4 de [Di1].

L'implication $(R) \Rightarrow (P)$ résulte de cette observation (pour $\sigma = \beta$ et $\pi = \varepsilon$). Avant de montrer la réciproque, introduisons la condition

(Q) Il existe une famille finie $\{g_1, ..., g_k\} \subset \Gamma$ et un entier $n \geqslant 1$ tels que, pour tout vecteur unité $\xi \in H_\beta = l^2(\Gamma) \Theta \mathbf{C}\delta$, on ait

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}(\beta(g_j)\xi \mid \xi) \leqslant k - \frac{1}{n}.$$

Preuve de $(Q) \Rightarrow$ *non*(P). Supposons que Γ satisfait (Q) et posons

$$X = \sum_{j=1}^{k} \alpha(g_j) + \alpha(g_j)^* \in C^*(\alpha(\Gamma)) \subset L(l^2(\Gamma)).$$

Cet opérateur autoadjoint laisse invariants les sous-espaces H_β et $H_\varepsilon = \mathbf{C}\delta$ de $l^2(\Gamma)$. La condition (Q) exprime que sa compression X_β à H_β vérifie $X_\beta \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$, et sa compression à H_ε est évidemment $2k$. La fonction f définie par $f(t) = 1$ pour $t \leqslant 2\left(k - \frac{1}{n}\right)$ et $f(2k) = 0$ est donc continue sur le spectre de X, et on peut identifier X_β et $f(X)$. Par suite $X_\beta \in C^*(\alpha(\Gamma))$ et $P_\delta = \frac{1}{2k}(X - X_\beta) \in C^*(\alpha(\Gamma))$, de sorte que la condition (P) n'est pas satisfaite.

Preuve de $(P) \Rightarrow (R)$. Si la condition (P) est satisfaite, la négation de (Q) l'est aussi: pour toute famille finie $\{g_1, ..., g_k\}$ de Γ, il existe une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ de vecteurs unité dans H_β avec $\lim_{n \to \infty} (\beta(g_j)\xi_n \mid \xi_n) = 1$ pour $j = 1, ..., k$. Ceci implique bien que la condition (R) est vérifiée.

Cette preuve nous a été communiquée par G. Skandalis; elle s'inspire de la preuve de $(d) \Rightarrow (c)$, pour le théorème 2.1 de [C2].

La preuve du théorème 1 est ainsi achevée. On dit qu'un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ est *intérieurement moyennable* s'il satisfait les conditions du théorème. On convient que le groupe réduit à un élément est intérieurement moyennable.

* * *

Terminons ce paragraphe par quelques observations sur la propriété gamma.

1) Si M est un ensemble d'opérateurs sur $l^2(\Gamma)$, nous notons M'' l'algèbre de von Neumann qu'il engendre. Considérons le cas particulier d'un groupe Γ

qui est CCI, c'est-à-dire le cas où $\lambda(\Gamma)''$ est un facteur, ou encore autrement dit le cas où $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ agit irréductiblement sur $l^2(\Gamma)$. On sait que l'intersection d'une C^*-algèbre irréductible avec l'algèbre $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts est ou bien nulle, ou bien égale à $\mathscr{K}$ (corollaire 4.1.10 de [Di1]). Par suite (P) est équivalent pour un groupe CCI à

(P') $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\alpha(\Gamma)) = \{0\}$.

D'autre part, un résultat de Connes (théorème 2.1 de [C2]) exprime que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma si et seulement si

(C) $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') = \{0\}$.

Enfin, on a évidemment

$$C^*(\alpha(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'').$$

Par suite, si le facteur $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma, alors le groupe Γ est intérieurement moyennable. Cette implication est à l'origine du travail d'Effros, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

2) Soit Γ un groupe CCI satisfaisant la condition (F) avec de plus $\sup |F_n| < \infty$, par exemple un groupe faiblement commutatif (voir § 2). Pour tout $n \geqslant 1$, notons χ_n la fonction caractéristique de F_n, qui est un élément de trace nulle dans le facteur $\lambda(\Gamma)''$. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$, donc tel que g et χ_n commutent dans $\lambda(\Gamma)''$, pour $n \geqslant n_g$. Par suite $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma (proposition 1.10 de [Di2]).

On peut sans doute encore montrer que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma lorsque Γ est un groupe CCI satisfaisant la « condition de Følner forte » suivante:

(F_f) Il existe une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles finis non vides de $\Gamma - \{1\}$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$ pour $n \geqslant n_g$.

3) Pour d'autres relations entre la moyennabilité intérieure de Γ et les propriétés de $\lambda(\Gamma)''$, voir [Ch1].

§ 2. Conditions suffisantes

Rappelons qu'un groupe satisfait la *propriété T de Kazhdan* si la représentation triviale ε (de dimension 1) est isolée dans le dual unitaire du groupe, ou encore si toute représentation unitaire du groupe contenant