§2. Conditions suffisantes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

qui est CCI, c'est-à-dire le cas où $\lambda(\Gamma)''$ est un facteur, ou encore autrement dit le cas où $C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma))$ agit irréductiblement sur $l^2(\Gamma)$. On sait que l'intersection d'une C^*-algèbre irréductible avec l'algèbre $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts est ou bien nulle, ou bien égale à $\mathscr{K}$ (corollaire 4.1.10 de [Di1]). Par suite (P) est équivalent pour un groupe CCI à

(P') $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\alpha(\Gamma)) = \{0\}$.

D'autre part, un résultat de Connes (théorème 2.1 de [C2]) exprime que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma si et seulement si

(C) $\quad \mathscr{K} \cap C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'') = \{0\}$.

Enfin, on a évidemment

$$C^*(\alpha(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma), \rho(\Gamma)) \subset C^*(\lambda(\Gamma)'', \rho(\Gamma)'').$$

Par suite, si le facteur $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma, alors le groupe Γ est intérieurement moyennable. Cette implication est à l'origine du travail d'Effros, comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction.

2) Soit Γ un groupe CCI satisfaisant la condition (F) avec de plus $\sup |F_n| < \infty$, par exemple un groupe faiblement commutatif (voir § 2). Pour tout $n \geqslant 1$, notons χ_n la fonction caractéristique de F_n, qui est un élément de trace nulle dans le facteur $\lambda(\Gamma)''$. Pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$, donc tel que g et χ_n commutent dans $\lambda(\Gamma)''$, pour $n \geqslant n_g$. Par suite $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma (proposition 1.10 de [Di2]).

On peut sans doute encore montrer que $\lambda(\Gamma)''$ possède la propriété gamma lorsque Γ est un groupe CCI satisfaisant la « condition de Følner forte » suivante:

(F_f) Il existe une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-ensembles finis non vides de $\Gamma - \{1\}$ telle que, pour tout $g \in \Gamma$, il existe un entier n_g avec $gF_ng^{-1} = F_n$ pour $n \geqslant n_g$.

3) Pour d'autres relations entre la moyennabilité intérieure de Γ et les propriétés de $\lambda(\Gamma)''$, voir [Ch1].

§ 2. Conditions suffisantes

Rappelons qu'un groupe satisfait la *propriété T de Kazhdan* si la représentation triviale ε (de dimension 1) est isolée dans le dual unitaire du groupe, ou encore si toute représentation unitaire du groupe contenant

faiblement ε contient nécessairement ε au sens fort (lemme 1 de [DK]). Rappelons aussi qu'un groupe Γ est dit *faiblement commutatif* si, pour toute partie finie F de Γ, il existe $g \neq 1$ dans Γ commutant aux éléments de F (c'est la condition (*c*) du lemme 6.1.1 de [MvN]). Un groupe $\Gamma \neq \{1\}$ de génération finie est faiblement commutatif si et seulement si son centre n'est pas réduit à un élément. Mais il existe des groupes CCI faiblement commutatifs; citons:

— Le groupe des permutations de $\mathbf{N}$ à supports finis, de même que son produit direct avec tout groupe CCI.

— La somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes CCI.

— Les groupes construits par McDuff [MD] pour exhiber une infinité non dénombrable de facteurs finis continus non isomorphes deux à deux.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un groupe* Γ *soit intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est moyennable.*

(ii) *Il existe dans* $\Gamma - \{1\}$ *une classe de conjugaison finie.*

(iii) Γ *est un produit direct* $\Gamma' \times \Gamma''$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et non réduit à* $\{1\}$.

(iv) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *intérieurement moyennable et* Γ'' *moyennable.*

(v) Γ *possède une famille* $(\Gamma_i)_{i \in I}$ *de sous-groupes intérieurement moyennables, avec* $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$.

(vi) Γ *est faiblement commutatif.*

(vii) Γ *est* CCI *et le facteur* $\lambda(\Gamma)''$ *possède la propriété gamma.*

Preuve. La suffisance de (i) est standard (lemmes 1.1.1 et 1.1.3 de [Gr]), celle de (ii) est banale, et celle de (v) se montre comme pour le cas moyennable (théorème 1.2.7 de [Gr]).

Pour (iii), considérons une moyenne intérieurement invariante μ' sur Γ'. On définit une moyenne intérieurement invariante μ sur Γ en posant pour toute partie S de $\Gamma - \{1\}$:

$$S' = S \cap ((\Gamma' - \{1\}) \times \{1\})$$

$$\mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S' = \emptyset, \\ \mu'(S') & \text{sinon}. \end{cases}$$

Supposons la condition (iv) vérifiée. Le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma')$ de tous les automorphismes de Γ' opère naturellement sur le convexe compact non vide C des moyennes intérieurement invariantes sur Γ', et l'action de tout automorphisme intérieur est banale par définition; par suite le quotient $\mathrm{Out}(\Gamma') = \mathrm{Aut}(\Gamma')/\mathrm{Int}(\Gamma')$ opère sur C. L'homomorphisme naturel $\Gamma'' \to \mathrm{Out}(\Gamma')$ associé à la suite exacte fournit donc une action affine de Γ'' sur C. Comme Γ'' est moyennable, l'action possède un point fixe μ qui est une moyenne intérieurement invariante sur Γ à support dans $\Gamma' - \{1\}$.

Nous avons déjà discuté la suffisance de (vii) à la fin du § 1, et celle de (vi) en résulte par le lemme 6.1.1 de [MvN]. On peut aussi observer que tout groupe dénombrable faiblement commutatif possède une suite de Følner $(F_n)_{n \geqslant 1}$ comme à la condition (F) du théorème 1, avec de plus $|F_n| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. □

La condition (vi) permet notamment de retrouver l'exemple du théorème 3 de [CC], qui est la somme restreinte d'une famille infinie dénombrable de groupes libres non abéliens. (C'est un exemple de groupe intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite est simple à trace unique.)

COROLLAIRE 3. *Pour qu'un groupe* Γ *soit non intérieurement moyennable, il suffit qu'il vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) Γ *est* CCI *et satisfait la propriété* T.

(ii) *Il existe une suite exacte* $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ *avec* Γ' *et* Γ'' *non intérieurement moyennables.*

(iii) Γ *possède un sous-groupe libre non abélien* $\mathbf{F}$ *tel que le centralisateur* $I_g = \{f \in \mathbf{F} \mid gf = fg\}$ *est abélien pour tout* $g \in \Gamma$ *avec* $g \neq 1$.

Preuve. Supposons la condition (i) vérifiée et considérons la représentation β de Γ dans $l^2(\Gamma)\Theta\mathbf{C}\delta$: elle ne contient pas fortement ε, car Γ est CCI; elle ne contient donc pas non plus faiblement ε, car Γ a la propriété T. On a donc la négation de la condition (R) du théorème 1.

Pour (ii), montrons la contraposée, et supposons donc qu'il existe une moyenne intérieurement invariante μ sur $\Gamma - \{1\}$. Si le support de μ rencontre $\Gamma' - \{1\}$, le groupe Γ' est intérieurement moyennable. Sinon, on définit une moyenne intérieurement invariante μ'' sur Γ'' en posant $\mu''(S) = \mu(\pi^{-1}(S))$ pour tout $S \subset \Gamma''$, où π désigne la surjection de Γ sur Γ''.

Pour (iii), nous renvoyons à l'exemple 2 de la section 5 dans [HaS]. □

La suffisance de (i) est due à Connes, Akemann et Walter [AW]; c'est aussi un cas particulier du théorème 2 de [LR]. La suffisance de (iii) est due à Akemann; elle est utilisée pour l'exemple 5 de [Ak], qui est un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et d'un groupe libre non abélien sur deux générateurs. (C'est un exemple de groupe non intérieurement moyennable dont la C^*-algèbre réduite n'est pas simple et possède plusieurs traces; pour d'autres exemples, voir le théorème 4 de [CC], et le produit semi-direct de $\mathbf{Z}^3$ et $SL(3, \mathbf{Z})$ considéré ci-dessous. Notons encore que tout groupe moyennable non trivial est intérieurement moyennable avec C^*-algèbre réduite non simple; enfin, les groupes du § 3 ci-dessous sont non intérieurement moyennables et ont des C^*-algèbres réduites simples à trace unique. La réponse à la question (1) de la section 2 de [Ha] est donc aussi négative que possible.)

Exemples avec produits semi-directs

On considère un produit semi-direct Γ donné sous la forme d'une extension scindée

$$1 \to \Gamma' \to \Gamma \underset{\curvearrowleft}{\to} \Gamma'' \to 1 .$$

Lorsque le produit est direct, les corollaires 2 et 3 montrent que Γ est intérieurement moyennable si et seulement si l'un au moins des groupes Γ', Γ'' l'est. La situation pour les produits semi-directs est différente.

Pour tout $n \in \{2, 3, ..., \infty\}$, notons $\mathbf{F}_n$ le groupe non abélien libre à n générateurs. Ce groupe n'est pas intérieurement moyennable. (C'est le lemme 6.2.2 de [MvN]; voir aussi la section 5 de [HaS] et le § 3 ci-dessous.) Soit $\pi: \mathbf{F}_2 \to \mathbf{Z}$ une surjection. Son noyau est isomorphe à $\mathbf{F}_\infty$, d'où un produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{F}_\infty \to \mathbf{F}_2 \underset{\curvearrowleft}{\to} \mathbf{Z} \to 1 \qquad \text{(A)}$$

avec $\Gamma' = \mathbf{F}_\infty$ et $\Gamma = \mathbf{F}_2$ non intérieurement moyennables, bien que $\Gamma'' = \mathbf{Z}$ soit moyennable.

Nous avons déjà fait allusion à un produit semi-direct de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_2$ pour lequel Γ' est moyennable alors que Γ et Γ'' ne sont pas intérieurement moyennables. Avant de décrire un second exemple, montrons:

Lemme 4. *Les produits semi-directs*

$$G = SL(3, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^3 \quad \textit{et} \quad \Gamma = SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$$

possèdent la propriété T *de Kazhdan.*

Preuve. Soit $\rho: G \to U(H)$ une représentation unitaire contenant faiblement la représentation triviale $\varepsilon: G \to U(\mathbf{C}) = \mathbf{S}^1$. Alors la restriction π de ρ à $SL(3, \mathbf{R})$ contient faiblement la représentation triviale de $SL(3, \mathbf{R})$. Ce groupe possédant la propriété T [DK], il existe un vecteur unité $\xi \in H$ avec $\pi(h)\xi = \xi$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$. Notons $f: G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(g) = (\rho(g)\xi \mid \xi)$, qui vaut 1 sur $SL(3, \mathbf{R})$. On a $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$ et pour tout $g \in G$. Comme l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$ possède un orbite dense (le complémentaire de l'origine), il en résulte que f est constante sur G, donc que ρ contient fortement ε. Ainsi G possède la propriété T.

Comme Γ est de covolume fini dans G, il possède aussi la propriété T. □

Le lemme 4 fournit un nouvel exemple de produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \to 1 \qquad \text{(B)}$$

avec noyau moyennable et les deux autres groupes non intérieurement moyennables.

En posant enfin

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \mathbf{F}_\infty \times \mathbf{Z}^3, \\ \Gamma &= \mathbf{F}_2 \times (SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3), \\ \Gamma'' &= \mathbf{Z} \times SL(3, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

on obtient par produit direct à partir de (A) et (B) une extension scindée

$$1 \to \Gamma' \to \Gamma \rightleftarrows \Gamma'' \to 1$$

où Γ' et Γ'' sont intérieurement moyennables et où Γ ne l'est pas. On trouve d'autres résultats sur la moyennabilité intérieure des produits semi-directs dans [Ch2].

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ. Quelles sont les relations entre la moyennabilité intérieure de Γ' et celle de Γ? (Voir ajout.)

§ 3. Exemples de groupes non intérieurement moyennables

Le corollaire 3 (i) fournit à volonté des groupes non intérieurement moyennables qui apparaissent naturellement en géométrie.

En effet, soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple à centre trivial dont chaque composante simple est de rang réel au moins 2, et soit Γ