AJOUT, DÉCEMBRE 1985

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

[MvN] MURRAY, F. D. and J. VON NEUMANN. On rings of operators *IV*. *Ann. of Math. 44* (1943), 716-808.

[Na] NAMIOKA, I. Følner's conditions for amenable semigroups. *Math. Scand. 15* (1964), 18-28.

[Pa] PASCHKE, W. Inner amenability and conjugation operators. *Proc. Amer. Math. Soc. 71* (1978), 117-118.

[Pi] PIER, J. P. Quasi-invariance intérieure sur les groupes localement compacts. *Actes du 6e Congrès des Math. d'Exp. latine*, Luxembourg 1981 (Gauthier-Villars 1982), 431-436.

[Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer 1972.

[Ro] ROSENBLATT, J. M. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand. 33* (1973), 153-170.

[Sa] SAKAI, S. *C*-algebras and W*-algebras*. Springer 1971.

[Ta] TARSKI, A. *Cardinal algebras*. Oxford Univ. Press 1949.

[Z] LYNDON, R. C. and P. E. SCHUPP. *Combinatorial group theory*. Springer 1977.

AJOUT, DÉCEMBRE 1985

En complément au corollaire 2, notons qu'un groupe Γ est intérieurement moyennable dès qu'il satisfait à l'une des conditions suivantes:

(viii) Γ agit sur un ensemble non vide X muni d'une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que l'isotropie $I(x)$ soit intérieurement moyennable pour tout $x \in X$.

(ix) Γ possède un sous-groupe intérieurement moyennable Γ' d'indice fini.

(x) Il existe une suite exacte $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ avec Γ'' intérieurement moyennable, de même que $\{ g \in \Gamma \mid ghg^{-1}h^{-1} \in \Gamma' \}$ pour tout $h \in \Gamma - \Gamma'$.

L'assertion (ix) résulte de (viii), pour l'action de Γ sur $X = \Gamma/\Gamma'$; elle répond partiellement à la dernière question du § 2. L'assertion (x) résulte aussi de (viii), pour l'action de Γ sur $\Gamma'' - 1$. L'assertion (viii) est « du type Fubini » et se montre comme suit (voir aussi la proposition 3.5 de l'article de Rosenblatt cité ci-dessous).

Soient $Y = \{ x \in X \mid I(x) = 1 \}$ et $Z = X - Y$; soit D un domaine fondamental, c'est-à-dire un sous-ensemble de X rencontrant chaque Γ-orbite en un unique point. Si $\mu(Y) \neq 0$ alors Γ est moyennable car, après normalisation, $S \mapsto \mu(SD)$ est une moyenne invariante sur Γ. Si $\mu(Y) = 0$ on choisit pour tout $x \in Z \cap D$ une moyenne intérieurement invariante μ_x sur $l^\infty(I(x) - 1)$;

pour $f \in l^\infty(\Gamma - 1)$ on définit $\tilde{f} \in l^\infty(Z)$ par $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(ghg^{-1})d\mu_x(h)$ pour $g \in \Gamma$ et $x \in D \cap Z$; alors $f \mapsto \int_Z \tilde{f}(z)d\mu(z)$ est une moyenne intérieurement invariante sur $l^\infty(\Gamma - 1)$.

L'assertion (viii) a une variante classique: si Γ agit sur un ensemble X possédant une moyenne Γ-invariante μ de telle sorte que $I(x)$ est moyennable pour tout $x \in X$, alors Γ est moyennable (même preuve, avec $\tilde{f}(gx) = \int_{I(x)} f(gh)d\mu_x(h)$). On peut donc généraliser la troisième condition du corollaire 3 en

(iii') Si Γ possède un sous-groupe non moyennable Γ' tel que le centralisateur $I_g = \{h \in \Gamma' \mid gh = hg\}$ est moyennable pour tout $g \in \Gamma - 1$, alors Γ n'est pas intérieurement moyennable

(considérer l'action de Γ' sur $X = \Gamma - 1$). Il en résulte par exemple que $SO(3)$ n'est pas intérieurement moyennable (considérer $\Gamma' = \Gamma$). Il en résulte aussi qu'il existe un groupe (construit par Ol'shanskii) dont tous les sous-groupes propres sont cycliques et qui n'est pas intérieurement moyennable.

Enfin, il nous paraît utile de compléter comme suit les références.

OL'SHANSKII, A. Yu. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35 (4)* (1980), 180-181.

PATERSON, A. L. T. Non amenability and Borel paradoxical decompositions for locally compact groups. *Proc. Amer. Math. Soc. 96* (1986), 89-90.

PIER, J. P. *Amenable locally compact groups.* Wiley 1984.

ROSENBLATT, J. M. Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc. 265* (1981), 623-636.

WAGON, S. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge Univ. Press 1985.

(Reçu le 22 janvier 1985)

Erik Bédos

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Blindern Oslo 3

Pierre de la Harpe

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24

vide-leer-empty