Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

Autor: Burgermeister, Pierre-François

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55086

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 199-210

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

par Pierre-François BURGERMEISTER

On connaît depuis assez longtemps la classification des représentations de la double flèche. J. Dieudonné [1] l'a obtenue pour un corps algébriquement clos, après avoir dressé un bref historique de la question. L'intérêt du présent article est de donner un traitement nouveau et particulièrement simple du problème. De plus, on prendra ici, comme corps de base, un corps commutatif quelconque.

Cet article est une version légèrement remaniée du travail de diplôme que j'ai présenté à l'Université de Genève. J'ai bénéficié pour l'élaborer de l'aide du professeur M. Kervaire; je tiens à lui exprimer ici mes remerciements.

1. INTRODUCTION

Soit k un corps. Une k-représentation de la double flèche est la donnée de 2 espaces vectoriels sur k de dimensions finies, E et F, et de 2 applications linéaires f_1 et f_2, de E dans F. On note: $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$.

Deux représentations, $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ et $E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F'$, sont isomorphes s'il existe $\varphi: E \to E'$ et $\psi: F \to F'$, des isomorphismes d'espaces vectoriels, tels que le diagramme double

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[d, "\psi"] \\ E' \arrow[r, shift left, "f'_1"] \arrow[r, shift right, "f'_2"'] & F' \end{tikzcd}$$

commute. C'est-à-dire: $\psi f_1 = f'_1\varphi$ et $\psi f_2 = f'_2\varphi$.

La somme directe de 2 représentations est définie par:

$$(E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F) \oplus (E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F') = E \oplus E' \underset{f_2 \oplus f'_2}{\overset{f_1 \oplus f'_1}{\rightrightarrows}} F \oplus F',$$

où $(f_i \oplus f'_i)(x+x') = f_i(x) + f'_i(x')$, $\forall x \in E$, $\forall x' \in E'$.

Les représentations sont en correspondance bijective avec les A-modules, où A est une algèbre de dimension finie [2]. Dans ce contexte, on peut appliquer le théorème de Krull-Schmidt ([3], p. 128), d'où il découle qu'une représentation se décompose de manière unique (à isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près) en une somme directe de représentations indécomposables. La classification s'obtient alors en dressant la liste de toutes les représentations indécomposables (à isomorphisme près).

2. Généralités

Il est clair qu'une représentation $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ est indécomposable si et seulement si la représentation duale, $F^* \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} E^*$, est indécomposable. On peut donc se limiter à l'étude des représentations indécomposables $A: E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, avec $\dim E \leqslant \dim F$.

Cas triviaux

a) Supposons $K = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \neq 0$. Alors A, indécomposable, se réduit à: $K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ et, nécessairement, $\dim K = 1$. Ecrivons $k \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ la représentation ainsi obtenue et notons-la B_0.

b) Supposons $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 \underset{\neq}{\subset} F$, et soit $G \neq 0$, un supplémentaire de $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$ dans F. A se réduit donc à $0 \rightrightarrows G$, et de nouveau, on doit avoir $\dim G = 1$. Ecrivons $0 \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} k$ cette représentation et notons-la C_0.