Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

Autor: Rummler, Hansklaus

Kapitel: §1. Die beste orthogonale Approximation einer regulären Matrix

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55087

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 211-218

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE POLARE ZERLEGUNG EINER REGULÄREN MATRIX UND DIE GEOMETRIE DER ORTHOGONALEN GRUPPE

von Hansklaus RUMMLER

§ 0. EINFÜHRUNG

Bekanntlich lässt sich jede reguläre $n \times n$-Matrix A mit reellen Koeffizienten eindeutig als Produkt $A = US$ schreiben, wobei U orthogonal und S positiv definit symmetrisch ist (vgl. [3]). Diese sogennante polare Zerlegung hat eine ebenso einfache wie interessante geometrische Deutung: U ist die beste orthogonale Approximation von A, wenn man den Raum $\mathbf{R}^{n \times n}$ aller reellen $n \times n$-Matrizen mit der üblichen euklidischen Struktur versieht. Man kann das auch so ausdrücken: Fasst man die Spalten der Matrix $A = (a_1, ..., a_n)$ als Basis des $\mathbf{R}^n$ auf, so ist $U = (u_1, ..., u_n)$ diejenige eindeutig bestimmte Orthonormalbasis, für die $\sum_{j=1}^{n} \| a_j - u_j \|^2$ minimal ist.

Darüber hinaus zeigt sich, dass für festes $A \in GL(n, \mathbf{R})$ die Funktion $f_A : O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ Aufschlüsse über die Geometrie von $O(n)$ gibt: Es ist fast immer eine perfekte Morse-Funktion.

Eine Übertragung der Resultate auf komplexe Matrizen bereitet keine Schwierigkeiten, aber der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den reellen Fall; aus dem gleichen Grunde verzichten wir auch darauf, singuläre Matrizen zu betrachten.

§ 1. DIE BESTE ORTHOGONALE APPROXIMATION EINER REGULÄREN MATRIX

Mit $\mathbf{R}^{n \times n}$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller reellen $n \times n$-Matrizen. $\mathbf{1}$ ist die Einheitsmatrix, und A^* die Transponierte der Matrix A. Wir versehen $\mathbf{R}^{n \times n}$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$< A, B > := \operatorname{tr}(A^* B) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} .$$

Folgende Eigenschaften dieses Skalarproduktes sind nahezu trivial:

(1) Ist U orthogonal, so sind Links- und Rechts-Multiplikation mit U Isometrien.

(2) Das Transponieren ist eine Isometrie.

(3) $\mathbf{R}^{n\times n}$ ist die orthogonale direkte Summe der beiden Unterräume der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Matrizen:

$$\mathbf{R}^{n\times n} = \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \oplus \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}} .$$

Sei jetzt $A \in GL(n, \mathbf{R})$ eine feste reguläre $n \times n$-Matrix. Wir suchen eine orthogonale Matrix $U \in O(n)$, für die der Abstand $\| A - U \|$ minimal ist. Bezeichnet $T_U O(n)$ den Tangentialraum an $O(n)$ in U,

$$T_U O(n) = \{UB; B \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}}\} ,$$

so gilt: $\| A - U \|$ minimal $\Rightarrow A - U \perp T_U O(n)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \langle A - U, UB\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad B \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}} \\
&\Leftrightarrow \langle U^*A - \mathbf{1}, B\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad B \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{asym}} \\
&\Leftrightarrow U^*A - \mathbf{1} \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \\
&\Leftrightarrow U^*A \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \\
&\Leftrightarrow A = US \text{ mit } S \in \mathbf{R}^{n\times n}_{\text{sym}} .
\end{aligned}$$

Dabei gilt offensichtlich noch $S^2 = A^*A$. Ist umgekehrt S symmetrisch und gilt $S^2 = A^*A$, so ist $U = AS^{-1}$ orthogonal.

Damit haben wir eine notwendige Bedingung für die Minimalität des Abstandes $\| A - U \|$: Es muss $A = US$ sein mit einer symmetrischen Matrix S, die die Gleichung $S^2 = A^*A$ erfüllt.

Als nächstes bestimmen wir alle diese Matrizen S: Da A regulär ist, ist die symmetrische Matrix A^*A positiv definit, und wir können ihre verschiedenen Eigenwerte in der Form $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_r^2$ schreiben mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$. $\mu_1, \ldots, \mu_r$ seien die entsprechenden Multiplizitäten, und für $i = 1, \ldots, r$ sei

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{\mu_i \times \mu_i} .$$

Dann können wir A^*A in der Form

$$A^*A = C\begin{pmatrix} \Lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r^2 \end{pmatrix} C^*$$

schreiben, wo C eine orthogonale Matrix ist, deren Spalten Eigenvektoren von A^*A sind. Folglich ist

$$S = C\begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_r \end{pmatrix} C^*$$

mit $S_i^2 = \Lambda_i^2$, d.h. $S_i = \lambda_i U_i$, wobei U_i orthogonal und symmetrisch ist. Für $A = US$ ist in diesem Falle

$$\begin{aligned} \| A - U \|^2 &= \| A \|^2 - 2\langle A, U\rangle + \| U \|^2 \\ &= \| A \|^2 - 2\mathrm{tr}(A^*U) + n \\ &= \| A \|^2 + n - 2\mathrm{tr}S \\ &= \| A \|^2 + n - 2\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{tr}U_i . \end{aligned}$$

Nun ist aber $\mathrm{tr}U_i \leqslant \mu_i$, wobei Gleichheit genau für $U_i = \mathbf{1}$ gilt. Damit ist $\| A - U \|^2 \geqslant \| A \|^2 + n - 2\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\mu_i$, und der kleinste Wert wird genau für $U_1 = \mathbf{1}, \ldots, U_r = \mathbf{1}$ erreicht, d.h. für

$$S = C\begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_r \end{pmatrix} C^*,$$

die einzige positiv definite symmetrische Lösung der Gleichung $S^2 = A^*A$. Damit haben wir gezeigt:

SATZ 1. *Zu* $A \in GL(n, \mathbf{R})$ *gibt es genau eine orthogonale Matrix* $U \in O(n)$, *für die der Abstand* $\| A - U \|$ *minimal ist. Sie ist eindeutig bestimmt durch die polare Zerlegung* $A = US$ *mit* U *orthogonal und* S *positiv definit symmetrisch.*

Wie wir bereits in der Einführung bemerkt haben, kann man U als diejenige Orthonormalbasis von $\mathbf{R}^n$ interpretieren, die A am nächsten liegt.

Im Gegensatz zu der durch das Gram-Schmidt-Verfahren konstruierten hängt sie nicht von der Ordnung der Basis A ab; genauer gilt:

SATZ 2. *A und U seien wie in Satz 1, P eine Permutationsmatrix. Dann ist $\tilde{U} = UP$ die beste orthogonale Approximation von $\tilde{A} = AP$.*

Beweis. $\| \tilde{A} - \tilde{U} \| = \| AP - UP \| = \| A - U \|$, da P ja als Permutationsmatrix orthogonal ist. Gäbe es ein $\tilde{\tilde{U}} \in O(n)$ mit $\| \tilde{A} - \tilde{\tilde{U}} \| < \| A - U \|$, so wäre $\tilde{\tilde{U}}P^*$ eine bessere Approximation von A als U.

Ebenso einfach sind die Beweise der folgenden Eigenschaften dieser besten orthogonalen Approximation:

SATZ 3.

(1) *Die beste orthogonale Approximation einer positiv definiten symmetrischen Matrix ist die Einheitsmatrix.*

(2) *Ist U die beste orthogonale Approximation von A, so ist U^* diejenige von A^*.*

§ 2. DIE ABSTANDSFUNKTION $f_A(U) := \| A - U \|^2$

Sei $A \in GL(n, \mathbf{R})$ fest. Um das Minimum der Abstandsfunktion $f_A : O(n) \to \mathbf{R}$, $f_A(U) := \| A - U \|^2$ zu bestimmen, haben wir oben alle kritischen Punkte dieser Funktion bestimmt: Es sind genau diejenigen Matrizen $U \in O(n)$, für die $A = US$ ist mit symmetrischem S, so dass $S^2 = A^*A$ ist. Diese Gleichung hat genau dann endlich viele — und zwar 2^n — symmetrische Lösungen S, wenn A^*A n verschiedene Eigenwerte $0 < \lambda_1^2 < \ldots < \lambda_n^2$ hat: Es sind die Matrizen

$$S = C \begin{pmatrix} \pm\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\lambda_m \end{pmatrix} C^*,$$

wenn $A^*A = C \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} C^*$ ist, wobei die Spalten der orthogonalen Matrix C die entsprechenden Eigenvektoren von A^*A sind. Zur Vereinfachung verwenden wir folgende Bezeichnungen: