V) Trisécantes dans P^N, N>s

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Reste à trouver quatre autres équations. Or on a démontré ([26], 4.d) qu'une droite isolée de V contribue dans $T(V)$ de $-3(2+l)$ où $l \in \mathbf{Z}$ est sa self-intersection. Les quatre surfaces $S(2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2)$, Veronese et del Pezzo S_5 (vues en b) contiennent respectivement 16, 0, 0, 10 droites et elles sont de self-intersection -1. Comme ces quatre surfaces sont des intersections de quadriques dans $\mathbf{P}^5$, elles n'ont pas d'autre trisécante que les droites qu'elles contiennent; ainsi pour ces surfaces, T est égal respectivement à $-48, 0, 0, -30$. On obtient donc comme en b) quatre nouvelles équations. Jointes aux quatre précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 18 & a_2 = -48 \\ \beta = -12 & \gamma = 84 \end{cases} \qquad a_3 = 24 \qquad \alpha = 12 \qquad u = 0 \qquad v = -12 .$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 5. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^5$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle $[\mathscr{T}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$* (nombre de tangentes d'inflexion de V) *est*

$$2n(2n^2-18n+25) + 12(t-\delta-d(n-7)) .$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection l dans ce nombre est $-3(2+l)$.

V) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^N$, $N > 5$

Naturellement, seuls les cas $N = 6$ et $N = 7$ vont nous intéresser car au-delà, il n'y a génériquement plus de trisécante à une surface.

1°) RETOUR À $\mathbf{P}^5$

Nous allons voir qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^N$, $N > 5$, est de la même forme qu'une formule trisécante pour une surface de $\mathbf{P}^5$. Précisément, on a la

PROPOSITION 12. *Soit $N = 6$ ou $N = 7$. Soit V une surface non-singulière de $\mathbf{P}^N$, n son degré, δ le nombre de points-doubles impropres apparents au-dessus d'un $\mathbf{P}^4$, d le degré de la courbe double apparente au-dessus d'un $\mathbf{P}^3$ et t son nombre de points-triples.*

Alors toute formule trisécante pour V *est, comme dans* $\mathbf{P}^5$, *de la forme*

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta, \gamma, u$ *et* v *sont des constantes.*

Preuve. Elle consiste à appliquer le théorème de Fulton-MacPherson comme on l'a déjà fait en (IV.1.b), pour se ramener à $\mathbf{P}^5$.

Soit en effet $\mathbf{P}^5$ fixé dans $\mathbf{P}^N$ et projetons génériquement V dans $\mathbf{P}^5$ (par un point si $N = 6$, par une droite si $N = 7$). La projection est un isomorphisme de V sur l'image, notée $\hat{V}$. Comme toujours (voir I.3.a), on a dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\mathscr{V}/\mathbf{C}$ (qui dans ce cas est isomorphe à un produit puisque $\hat{V}$ n'acquiert pas de singularité par projection) avec $\mathscr{V}_1 = V$ et $\mathscr{V}_0 = \hat{V}$.

On a donc dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ un sous-schéma relatif $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathscr{V}/\mathbf{C}$ isomorphe à un produit, ayant pour fibre $\mathrm{Hilb}_c^3\, V$ en 1 et $\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}$ en 0. Ainsi $[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ est rationnellement équivalent à $[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$ dans $\mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N$.

Soit K un cycle fixé de $A^{7-N}(Al^3\, \mathbf{P}^N)$. On a

$$\deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V] = \deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$$

soit encore $T(V) = T(\hat{V})$. Regardons alors le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont indiquées entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc}
(2N+1) & Al^3\, \mathbf{P}^N & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^N & (3N) \\
 & \uparrow j & & \uparrow u & \\
(11) & Al^3\, \mathbf{P}^5 & \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^5 & (15)\ .
\end{array}$$

Bien entendu, schématiquement $Al^3\, \mathbf{P}^N \cap \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^5 = Al^3\, \mathbf{P}^5$, comme le prouve le lemme 14 de l'Annexe 7. D'après le théorème de Fulton-MacPherson (voir II.2.a), leur intersection en tant que cycle peut être choisie à support dans $Al^3\, \mathbf{P}^5$.

Plus précisément, si $\alpha = [\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$, on a $i^* u_* \alpha = j_* C$ où

$$C = \beta \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}]$$

avec β dans $A^{N-5}(Al^3\, \mathbf{P}^5)$. (Le $N-5$ étant la différence entre $3N + 11$ et $2N + 16$). Par suite, pour un cycle fixé K de $A^{7-N}(Al^3\, \mathbf{P}^N)$, il vient par la formule des projections :

$$\deg K \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}] = \deg K \,.\, j_* C = \deg j^* K \,.\, C$$
$$= \deg j^* K \,.\, \beta \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, \hat{V}] \,.$$

Mais comme $j^*K \,.\, \beta$ est un cycle fixé dans $A^2(Al^3\, \mathbf{P}^5)$, ce degré représente une formule trisécante pour $\hat{V}$ dans $\mathbf{P}^5$, par définition même (voir I.1). D'après la proposition 11, il est donc de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)$$

puisque les invariants de $\hat{V}$ sont évidemment les mêmes que ceux de V. D'où la proposition 12.

2°) Trisécantes dans $\mathbf{P}^6$

a) Commençons par chercher pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, *le nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé.* Ce nombre $T(V)$ est par définition le degré du 0-cycle $\mathrm{Axe}^*\sigma_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}_c^3\, V]$ où $i : Al^3\, \mathbf{P}^6 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^6$ est l'injection canonique et $\sigma_1 \in A^1(G(1, 6))$ est le cycle des droites coupant un $\mathbf{P}^4$ fixé de $\mathbf{P}^6$.

D'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$T(V) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) \,.$$

Soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. On a (vu l'Annexe 5) les invariants de $\tilde{V}$:

$$\tilde{n} = n + 1 \,, \quad \tilde{d} = n + d \,, \quad \tilde{t} = t + d \,, \quad \tilde{\delta} = \delta + n \,.$$

D'autre part, $\mathrm{Hilb}_c^3\, \tilde{V}$ est formé des quatre composantes disjointes $\mathrm{Hilb}_c^3\, V$, $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$, $V \times \mathrm{Hilb}^2\, P$ et $\mathrm{Hilb}_c^3\, P$. La contribution de la première et la dernière dans $T(\tilde{V})$ est respectivement $T(V)$ et $T(P) = a_1$ (puisque $n = 1$, $d = t = \delta = 0$ pour P). La troisième a une contribution nulle, puisqu'un triplet aligné ayant deux points dans P est dans P, donc ne peut couper V.

Reste à trouver la contribution à $T(\tilde{V})$ de la deuxième composante $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$. Il s'agit des sécantes à V coupant P et un $\mathbf{P}^4$. Par la formule de Pieri, on a dans $A^{\cdot}(G(1, 6))$:

$$\sigma_1 \,.\, (2, 6) = (2, 5) + (1, 6) \,.$$

De sorte que, à équivalence rationnelle près, la contribution à $T(\tilde{V})$ de $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$ se décompose en

— les sécantes à V rencontrant une droite de $\mathbf{P}^6$,

— les sécantes à V dans un $\mathbf{P}^5$ fixé et y rencontrant un plan.

Dans le premier cas, leur nombre est δ puisqu'il s'agit du nombre de points-doubles d'une projection sur un $\mathbf{P}^4$ par une droite. Dans le deuxième cas, il s'agit du nombre de points-doubles de la courbe $V \cap \mathbf{P}^5$ projetée sur un $\mathbf{P}^2$ par un plan de $\mathbf{P}^5$. C'est donc d: le degré de la courbe double Γ de la surface V projetée sur un $\mathbf{P}^3$. Grâce à la généricité de P, les multiplicités sont bien 1. On a donc en conclusion:

$$T(\tilde{V}) = T(V) + \delta + d + a_1 .$$

Comme d'habitude, on trouve par identification (lemme 12) de

$$\delta : u = 1 ,$$

$$d : \alpha + \beta = 1 ,$$

$$n : \begin{cases} -\gamma - v = a_2 - a_3 & (n=-1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma + 2u + v = 0 & (n=1) . \end{cases}$$

Il reste maintenant à trouver quatre autres équations. Si on désigne par $S(a, b, c, d)$ l'intersection complète de quatre hypersurfaces de degrés a, b, c, d dans $\mathbf{P}^6$, on voit que $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$ et $S(2, 2, 2, 2)$ n'ont pas de trisécante pour raison de degré. De plus, seule la première contient des droites, en nombre fini: 16. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces puisqu'elles n'ont pas de trisécante rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé.

De même, la surface de Veronese dans $\mathbf{P}^5$, plongée dans $\mathbf{P}^6$, n'a pas de trisécante car elle est intersection de quadriques dans $\mathbf{P}^5$ et elle ne contient pas de droite non plus. Pour elle aussi, $T = 0$. On obtient ainsi quatre nouvelles équations. Jointes aux précédentes, elles forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ \beta = -3 \end{cases} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = 4 \qquad \alpha = 4$$
$$\gamma = 8 \qquad u = 1 \qquad v = -4 .$$

On a donc démontré le

THÉORÈME 6. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle* $\mathrm{Axe}^*\sigma_1 . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ (nombre de trisécantes à V rencontrant un $\mathbf{P}^4$ fixé) *est*

$$4\binom{n}{3} - 2n + 4t - d(3n-8) + \delta(n-4) .$$

b) Cherchons maintenant, toujours pour une surface V de $\mathbf{P}^6$, *le nombre de tangentes à V recoupant V.* Cette fois, ce nombre $T(V)$ est le degré du 0-cycle $[\mathscr{D}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$ où $\mathscr{D}$ est l'hypersurface de $Al^3 \mathbf{P}^6$ formée des triplets non simples.

Toujours d'après la proposition 12, ce nombre est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v) .$$

Soit $\tilde{V} = V \cup P$ où P est un plan disjoint de V, comme en a). La contribution de la composante $\mathrm{Hilb}^2 V \times P$ de $\mathrm{Hilb}_c^3 \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$ est alors le nombre de tangentes à V coupant un plan fixe. C'est donc le nombre ν de points de ramification dans une projection générique sur un $\mathbf{P}^3$ par un plan de $\mathbf{P}^6$, correspondant aux ν points-pince de la surface projetée. Or on a (Annexe 6) $\nu = 2(d - \delta)$. D'où comme précédemment,

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + 2(d - \delta) .$$

Comme en a), par identification grâce au lemme 12, on obtient quatre équations.

Maintenant, des quatre surfaces vues précédemment: $S(2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2)$ et Veronese, les trois dernières ne contiennent pas de droite et n'ont pas de trisécante. On a donc $T = 0$ pour ces trois surfaces, d'où trois nouvelles équations. Par contre, $S(2, 2, 1, 1)$ contient 16 droites de self-intersection -1. Or on a montré ([26], 4.e) qu'une droite isolée dans V, de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $4\binom{3+l}{2}$ dans le nombre $T(V)$. Pour $S(2, 2, 1, 1)$, on a donc $T = 64$. D'où une dernière équation.

Le système de huit équations ainsi obtenu est inversible et on trouve

$$\begin{cases} a_1 = -24 & a_2 = 72 & a_3 = -48 & \alpha = -24 \\ \beta = 26 & \gamma = -144 & u = -2 & v = 24 . \end{cases}$$

On a donc montré le

THÉORÈME 7. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^6$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle $[\mathscr{D}] . i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 V]$* (nombre de tangentes à V recoupant V) *est:*

$$-4n(2n^2 - 15n + 19) - 24t + 2d(13n - 72) - 2\delta(n - 12) .$$

De plus, si V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ dans ce nombre est $4\binom{3+l}{2}$.

3°) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^7$

Dans ce cas, il n'y a qu'une formule à chercher, car *en général il n'y a qu'un nombre fini de trisécantes* pour une surface V de $\mathbf{P}^7$. Nous nous intéressons donc au degré $T(V)$ du 0-cycle i^* [$\mathrm{Hilb}_c^3\, V$] où comme d'habitude $i\colon Al^3\, \mathbf{P}^7 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\, \mathbf{P}^7$ est l'injection canonique. D'après la proposition 12, ce degré est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + \delta(un + v)\,.$$

Comme dans le cas de $\mathbf{P}^6$ (paragraphe 2), soit $\tilde{V}$ la réunion de V et d'un plan P disjoint. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$T(\tilde{V}) = T(V) + a_1 + \delta\,.$$

En effet, δ est la contribution de la composante $\mathrm{Hilb}^2\, V \times P$ de $\mathrm{Hilb}_c^3\, \tilde{V}$ dans $T(\tilde{V})$: c'est le nombre de sécantes à V rencontrant un plan P, soit le nombre de points-doubles δ de la projection de V sur un $\mathbf{P}^4$. (Les multiplicités sont 1 car P est générique).

Il vient alors une identité entre n, d, t, δ puisqu'on connaît (lemme 13) les invariants de V. Grâce au lemme 12, par identification, on obtient quatre équations liant les coefficients $a_1, a_2 \ldots v$. Il reste à trouver quatre autres équations. Soit $S(a, b, c, d, e)$ l'intersection complète de cinq hypersurfaces de degrés a, b, c, d, e dans $\mathbf{P}^7$. Aucune des quatre surfaces suivantes n'a de trisécante dans $\mathbf{P}^7$, pour raison de degré, et aucune ne contient de droite: $S(2, 2, 2, 1, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 1)$, $S(2, 2, 2, 2, 2)$ et la surface de Veronese (plongée dans $\mathbf{P}^7$). On a donc $T = 0$ pour ces quatre surfaces, d'où (puisqu'on connaît leurs invariants) quatre autres équations.

Jointes aux quatre équations précédentes, on obtient un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = 5 & a_2 = -18 \qquad a_3 = 14 \qquad \alpha = 8 \\ \beta = -8 & \gamma = 40 \qquad u = 1 \qquad v = -8\,. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a vu ([26], 4.f) qu'une droite isolée de V, de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$, contribue de $-\binom{4+l}{3}$ dans le nombre $T(V)$.

On a donc dénombré le

THÉORÈME 8. *Soit V une surface de $\mathbf{P}^7$ d'invariants (n, d, t, δ). Alors le degré du 0-cycle i^* [$\mathrm{Hilb}_c^3\, V$] (nombre de trisécantes à V) est*

$$5n - 18\binom{n}{2} + 14\binom{n}{3} + 8t - 8d(n-5) + \delta(n-8).$$

Si de plus V contient un nombre fini de droites, la « contribution » d'une telle droite de self-intersection $l \in \mathbf{Z}$ à ce nombre est $-\binom{4+l}{3}$.

Remarque. On peut par exemple vérifier que la surface $S(2, 2, 2, 2, 3)$ de $\mathbf{P}^7$ possède 512 trisécantes, ce que donne un calcul direct dans la grassmannienne $G(1, 7)$.

VI) Annexe

Nous avons regroupé dans cette annexe tous les calculs auxiliaires qui auraient alourdi le cours du texte. Il s'agira la plupart du temps de calculs en coordonnées locales.

1°) $\mathrm{Hilb}_c^k Q$

Ce paragraphe sert à étudier $\mathrm{Hilb}_c^3 S$ lorsque $S \subset \mathbf{P}^4$ est une surface dont les singularités sont *ordinaires*, i.e. localement réunion de deux branches lisses transverses. (Voir I.2.a.)

Soit Q dans $\mathbf{C}^4$ la réunion de deux plans P_1 et P_2 se coupant en l'origine.

Lemme 9. a) *Tout k-uplet curviligne ξ_0 de support $\{0\}$ contenu dans Q est limite dans $(\mathrm{Hilb}_c^k Q)_{\mathrm{red}}$ de k-uplets formés de points distincts. En particulier $\mathrm{Hilb}_c^k Q$ est génériquement réduit car $\mathrm{Hilb}_{\neq}^k Q$ est dense (et réduit).*

b) $\mathrm{Hilb}_c^k Q$ *est en fait réduit.*

Preuve. Soit (x, y, z, u) un système de coordonnées pour lequel P_1 est donné par $x = y = 0$ et P_2 par $z = u = 0$. De sorte que l'idéal de Q est

$$J = (x, y) \cap (z, u) = (xz, yz, xu, yu).$$

Montrons a). Soit ξ_0 dans Q un k-uplet curviligne avec $\mathrm{Supp}\,\xi_0 = \{0\}$. Mais ξ_0 est contenu dans une courbe non-singulière Γ. Celle-ci est « transverse » soit à P_1 soit à P_2; supposons Γ transverse à P_1; quitte à faire une transformation linéaire sur x et y, Γ peut être paramétrée par

$$y = \alpha(x), \qquad z = \beta(x), \qquad u = \gamma(x),$$

où α, β, γ sont dans l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[x]]$. L'idéal de ξ_0 dans $\mathbf{C}[[x, y, z, u]]$ est donc

$$I_0 = (x^k, y-\alpha(x), z-\beta(x), u-\gamma(x)).$$

Comme on a l'inclusion $\xi_0 \subset Q$, soit encore $I_0 \supset J$, il vient $x\beta(x)$ et $x\gamma(x)$ multiples de x^k. En supprimant par ailleurs les termes de degré supérieur à k, l'idéal se réécrit: