**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 33 (1987)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES Propriétés algébriques et arithmétiques
**Autor:** Cerlienco, L. / Mignotte, M. / Piras, F.
**Kapitel:** III. Espaces de s.r.l. sur K
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-87887

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

$$h_{ij} = \binom{i}{j}_q = \begin{cases} \dfrac{(i)_q!}{(j)_q!(i-j)_q!} & \text{si} \quad i \geqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i < j, \end{cases}$$

où $(0)_q! = 1$, $(i)_q! = \prod_{s=1}^{n} (s)_q$ et $(s)_q = 1 + q + \ldots + q^{s-1}$.

d) si $X_i = i$ alors $H$ est la matrice des nombres de Stirling de seconde espèce $h_{ij} = S(i,j)$ pour $i \geqslant j$, $h_{ij} = 0$ pour $i < j$, définis par la formule

$$X^i = \sum_{j=0}^{i} S(i,j)\, X(X-1)\ldots(X-k+1)$$

(voir [15]).

13) Soit $\xi = (\xi_n)$ une s.r.l. d'échelle $G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \ldots - a_0$; on peut regarder son terme $\xi_n$ en tant que polynôme en les variables $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Alors la suite donnée par

$$\eta_n = \frac{\partial^h \xi_n}{\partial_{a_0}^{h_0} \ldots \partial_{a_{m-1}}^{h_{m-1}}}$$

est une s.r.l. d'échelle $G^{h+1}$.

## III. Espaces de s.r.l. sur $\mathscr{K}$

Dans *I* nous avons étudié une suite particulière $\xi = (\xi_n)$ à valeurs dans $\mathscr{K}$ et donné différentes conditions équivalentes pour que $\xi$ soit une s.r.l. Ici, nous étudions des espaces de suites et nous utilisons la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathscr{K}$.

1. Nous considérons l'ensemble $\mathscr{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathscr{K}$ et l'ensemble $\mathscr{K}[[X]]$ des séries formelles sur $\mathscr{K}$, tous deux avec leur structure de $\mathscr{K}$-espace vectoriel. Nous identifierons implicitement $\mathscr{K}[X]$ à l'espace $\mathscr{K}^{(\mathbf{N})}$ des suites à valeurs dans $\mathscr{K}$ ultimement nulles et $\mathscr{K}[[X]]$ à l'espace $\mathscr{K}^{\mathbf{N}}$ des suites quelconques à valeurs dans $\mathscr{K}$ (rappelons que $\mathscr{K}^{\mathbf{N}}$ est le dual linéaire de $\mathscr{K}^{(\mathbf{N})}$).

2. Etant donné une s.r.l. $\xi$, l'ensemble de toutes les échelles de récurrence qu'elle vérifie est un idéal de l'anneau $\mathscr{K}[X]$ il admet donc un générateur unitaire unique que l'on appelle le *polynôme minimal* de $\xi$. On appellera *rang* de $\xi$ le degré du polynôme précédent. Evidemment, une suite d'ordre $m$

possède un rang au plus égal à $m$ (contrairement au rang, l'ordre d'une s.r.l. fixée n'est pas défini de manière unique).

3. Soit $G$ un polynôme fixé à coefficients dans $\mathscr{K}$. On écrira encore

$$G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \ldots - a_0 = \prod_{i=1}^{k} (X-\omega_i)^{r_i},\ \omega_i \in \mathscr{L}\ .$$

Nous considérons l'ensemble $S_G$ de toutes les s.r.l. d'échelle $G$. Un élément $\xi$ de $S_G$ est uniquement déterminé par ses $m$ premiers termes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$; chaque autre terme $\xi_n$ dépend linéairement de ceux-ci. Il en résulte que $S_G$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m$ de $\mathscr{K}^{\mathbf{N}}$. Les $m$ éléments $\xi^{(i)} = (\xi_n^{(i)})_{n\geqslant 0}$, $i = 0, \ldots, m-1$, constituent une base de $S_G$ si et seulement si le déterminant

$$\det\left((\xi_j^{(i)})\ 0 \leqslant i, j \leqslant m-1\right)$$

est non nul.

Suivant les cas, il est utile de prendre une base de $S_G$ de l'un des types suivants:

a) la base constituée par les s.r.l. dites *fondamentales*

$$\zeta^{(i)} = (\zeta_n^{(i)})_{n\geqslant 0},\ i = 0, \ldots, m-1$$

définies par les conditions initiales $\zeta_j^{(i)} = \delta_j^i$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ ($\delta_j^i$ est le symbole de Kronecker, $\delta_j^i = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). Sur cette base, un élément $\xi$ de $S_G$ s'écrit tout simplement

$$\xi = \xi_0\,\zeta^{(0)} + \ldots + \xi_{m-1}\,\zeta^{(m-1)}\ ; \tag{8}$$

b) la base formée par les suites

$$(\omega_i^n)_{n\geqslant 0},\ \left(\binom{n}{1}\omega_i^{n-1}\right), \ldots, \left(\binom{n}{r_i-1}\omega_i^{n-r_i+1}\right)_{n\geqslant 0},\ i = 1, \ldots, k\ ,$$

ce qui correspond aux formules (3) et (4);

c) enfin une base de la forme $\varphi, E\varphi, \ldots, E^{m-1}\varphi$ où $\varphi$ est une s.r.l. quelconque admettant $G$ comme polynôme minimal (par exemple les suites $\zeta^{(0)}$ et $\zeta^{(m-1)}$ de la base a)).

4. Si à une suite $\xi = (\xi_n)_{n\geqslant 0}$ quelconque, on associe la *matrice de Hankel*

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & \ldots \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_{n+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_p & \xi_{p+1} & \xi_{p+2} & \ldots & \xi_{n+p} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{9}$$

alors on vérifie facilement que

(i) la suite $\xi$ est une s.r.l. si et seulement si il existe un entier $m$ tel que tout mineur d'ordre plus grand que $m$ extrait de $H(\xi)$ soit nul;

(ii) si $\xi$ est une s.r.l. de rang $m$ alors son polynôme minimal est donné par le déterminant

$$G(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & X^2 & \dots & X^m \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_m \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m-1} & \xi_m & \xi_{m+1} & \dots & \xi_{2m-1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

5. De (5) résulte, comme nous l'avons déjà observé, que chaque élément de $S_G$ admet un multiple quelconque de $G$ comme polynôme caractéristique; autrement dit, l'espace $S_G$ est l'orthogonal de l'idéal $(G)$ engendre par $G$ (regardé en tant que sous-espace de $\mathscr{K}[X]$):

$$S_G = (G)^{\perp} . \tag{11}$$

La dualité sous-entendue dans la formule précédente peut être décrite de manière plus explicite. Identifions la variable $X$ à l'application linéaire

$$\begin{aligned} \text{« } X \text{ »}: \mathscr{K}[X] &\to \mathscr{K}[X] \\ A(X) &\mapsto X \,.\, A(X) \end{aligned}$$

(tout simplement la multiplication par $X$); alors l'application duale est l'opérateur de décalage $E$. Ainsi, à l'application de multiplication par $G(X)$: $A(X) \mapsto G(X)\, A(X)$ — dont l'image est $(G)$ — correspond par dualité l'opérateur $G(E)$ — dont le noyau est $S_G$. La relation $(\mathrm{Im} f)^{\perp} = \mathrm{Ker} f^*$, valable pour une application linéaire quelconque $f$ de duale $f^*$, équivaut à la relation (11) dans le cas considéré.

6. Le lien que nous avons indiqué entre le sous-espace $S_G$ et l'idéal $(G)$ peut être étendu en un lien entre l'espace $S$ de toutes les s.r.l. et l'espace $\mathscr{K}[X]$, ceci en ayant recours à la notion de *bialgèbre.*

Une étude détaillée de la structure usuelle de bialgèbre sur $\mathscr{K}[X]$ et de sa bialgèbre duale est contenue en [51]. Pour un développement général sur la structure de bialgèbre et de coalgèbre, nous renvoyons à [59] et [1]. Pour la commodité du lecteur, nous indiquons ici les notions utilisées dans le présent article.

Nous noterons par $V$ un espace vectoriel sur $\mathscr{K}$ et par $(b^{(i)})$, ou plus simplement $(b^i)$, une base de cet espace. On considère ici une structure d'algèbre comme un triplet $\mathscr{A} = (V, m, n)$ avec la condition que l'application linéaire

$$m: V \otimes V \to V$$
$$b^i \otimes b^j \mapsto \sum_h t^{ij} b^h$$

[autrement dit, $m$ correspond à la multiplication et on a $b^i b^j = \sum_h t_h^{ij} b^h$]

et le plongement

$$u: \mathscr{K} \to V$$
$$1 \mapsto \Sigma e_i b^i$$

rendent commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{I \otimes m} & V \otimes V \\ \downarrow{\scriptstyle m \otimes I} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ V \otimes V & \xrightarrow{m} & V \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{K} \otimes V & \xrightarrow{u \otimes I} & V \otimes V & \xrightarrow{I \otimes u} & V \otimes \mathscr{K} \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow & \\ & & V & & \end{array}$$

(Le premier diagramme exprime tout simplement l'associativité de la multiplication; dans le second — qui ne fait que traduire que $u$ est unité — les flèches doubles représentent les isomorphismes canoniques). En termes des constantes de structure, ces conditions s'expriment par les formules

$$\sum_h t_h^{ij} t_k^{hl} = \sum_h t_h^{jl} t_k^{ih}$$

et

$$\sum_i e_i t_h^{ij} = \sum_i e_i t_h^{ji} = \delta_h^j \text{(le symbole de Kronecker).}$$

La définition d'une coalgèbre $\mathscr{C} = (V, \Delta, \varepsilon)$ s'obtient par dualisation de la précédente; maintenant les deux applications linéaires

$$\Delta : V \to V \otimes V \quad \text{(diagonalisation ou comultiplication)}$$
$$b^h \mapsto \sum_{i,j} \tau_{ij}^h \, b^i \otimes b^j$$

et

$$\varepsilon : V \to \mathscr{K} \qquad \text{(counité)}$$
$$b^h \mapsto \varepsilon^h$$

doivent rendre commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Delta} & V \otimes V \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes I \\ V \otimes V & \xrightarrow{I \otimes \Delta} & V \otimes V \otimes V \end{array} \qquad \text{(coassociativité)}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{K} \otimes V & \xleftarrow{\varepsilon \otimes I} & V \otimes V & \xrightarrow{I \otimes \varepsilon} & V \otimes \mathscr{K} \\ & \searrow & \uparrow \Delta & \swarrow & \\ & & V & & \end{array}$$

(On renverse les flèches des diagrammes précédents.)

Une application $f : V \to V$ est un morphisme d'algèbre (resp. de coalgèbre) si elle est linéaire et vérifie $f \circ m = m \circ (f \otimes f)$ et $f \circ u = u$ (respectivement: $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$ et $\varepsilon \circ f = \varepsilon$).

A chaque coalgèbre $\mathscr{C} = (V, \Delta, \varepsilon)$ est associée son algèbre duale $\mathscr{C}^* = (V^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$, où $V^*$ est le dual linéaire de $V$ et $\Delta^*$, $\varepsilon^*$ les applications linéaires respectivement duales de $\Delta$ et $\varepsilon$. Sur la (pseudo-)base $(b_i)$ duale de $(b^i)$, i.e. $b_i(b^j) = \delta_i^j$, les constantes de l'algèbre $\mathscr{C}^*$ coïncident avec celles de $\mathscr{C}$.

Le passage de l'algèbre $\mathscr{A} = (V, m, n)$ à sa coalgèbre duale $\mathscr{A}^\circ = (V^\circ, m^\circ, u^\circ)$ est défini d'une manière analogue en dimension finie (on a alors $V^\circ = V^*, m^\circ = m^*$ et $u^\circ = u^*$); par contre, si la dimension de $V$ est infinie, alors l'ensemble $V^\circ$ sous-jacent à $\mathscr{A}^\circ$ est un sous-ensemble strict de $V^*$ [car $m^* : V^* \to (V \otimes V)^*$ mais $V^* \otimes V^* \subsetneq (V \otimes V)^*$]. Il est bien connu

qu'on doit prendre pour $V^\circ$ l'espace des *fonctions linéaires représentatives*, c'est-à-dire des formes linéaires $f: V \to \mathscr{K}$ telles que Ker $f$ contienne un idéal $J$ de $V$ de codimension finie.

La structure $\mathscr{B} = (V, m, \Delta, u, \varepsilon)$ est une *bialgèbre* si $(V, m, u)$ est une algèbre, $(V, \Delta, \varepsilon)$ une coalgèbre et si $\Delta$ et $\varepsilon$ sont des morphismes d'algèbre (ou, ce qui est équivalent, si $m$ et $u$ sont des morphismes de coalgèbre). Ceci se traduit évidemment en termes de constantes de structures (voir [16], formule (5) à (8)).

Le passage à la bialgèbre duale $\mathscr{B}^\circ = (V^\circ, \Delta^\circ, m^\circ, \varepsilon^\circ, u^\circ)$ ne représente pas de problème puisque $\Delta^*(V^\circ \otimes V^\circ) \subseteq V^\circ$ ($\Delta^\circ$ et $\varepsilon^\circ$ sont définies respectivement comme les restrictions à $V^\circ$ de $\Delta^*$ et $\varepsilon^*$).

En ce qui nous concerne, les deux exemples suivants sont fondamentaux.

1) L'espace vectoriel $\mathscr{K}[X]$ des polynômes possède une structure naturelle de bialgèbre $\mathscr{B} = \mathscr{K}[X], m, \Delta, u, \varepsilon)$ dont les applications linéaires sont définies par

$$m(X^i \otimes X^j) = X^{i+j}, \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X,$$
$$u(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(X^i) = \delta_0^i \quad \text{(le symbole de Kronecker)}.$$

Plus simplement: $m$ est la multiplication usuelle des polynômes, $\Delta$ associe à $P(X)$ le polynôme $P(X+Y)$ [ici on identifie $X^i \otimes X^j$ à $X^i Y^j$] et enfin $\varepsilon$ associe à $P(X)$ son terme constant $P(0)$.

2) L'espace $S$ de toutes les s.r.l. possède lui aussi une structure naturelle de bialgèbre $\mathscr{S} = (S, \tilde{m}, \tilde{\Delta}, \tilde{u}, \tilde{\varepsilon})$

$$\tilde{u}: \mathscr{K} \to S, \quad 1 \mapsto (\delta_n^0)_{n \geq 0}$$
$$\tilde{\varepsilon}: S \to \mathscr{K}, \quad (\xi_n)_{n \geq 0} \mapsto \xi_0$$
$$\tilde{m}: S \otimes S \to S, \quad \xi \otimes \eta \mapsto \xi * \eta$$
(c'est le produit défini en A II 5))

et

$$\tilde{\Delta}: S \to S \otimes S, \quad \xi \mapsto H(\xi)$$

(dans ce dernier cas on identifie $\mathscr{K}^{\mathbf{N}} \otimes \mathscr{K}^{\mathbf{N}}$ avec l'espace des matrices infinies de type $\omega \times \omega$ et $H(\xi)$ désigne la matrice de Hankel de $\xi$).

Le lien entre les structures ci-dessus est fourni par le résultat fondamental suivant [51]:

THÉORÈME (Peterson-Taft, 1980). *La bialgèbre $\mathscr{S}$ des s.r.l. est la bialgèbre duale de celle des polynômes.*

IV.

Dans ce paragraphe nous montrons comment la théorie des s.r.l. permet d'obtenir des algorithmes utiles pour la résolution de certains problèmes algébriques et numériques relatifs à $\mathscr{K}[X]$. Le contenu de la fin du paragraphe précédent fournit une justification théorique générale à la méthode utilisée ici.

En général, nous utiliserons sans les rappeler les notations introduites plus haut.

1. *Quelques problèmes d'élimination*

*Premier problème.* Soient donnés $n+2$ polynômes $G_i(X_i)$, $i = 0, ..., n$, et $Z = Z(X_0, ..., X_n)$; déterminer — rationnellement en fonction des coefficients des $G_i$ et de $Z$ — un polynôme $G(X)$ dont les racines sont toutes les valeurs $Z(\omega_{0,j_0}, \omega_{1,j_1}, ..., \omega_{n,j_n})$ où les $\omega_{i,j_i}$ parcourent les racines de $G_i$.

Algorithme 1. Il comporte les pas suivants:

a) construire $n+1$ s.r.l. $\xi^{(i)}$, où $\xi^{(i)}$ admet $G_i$ comme polynôme minimal;

b) construire la s.r.l. $\eta = (\eta_m)_{m \geqslant 0}$ donné par

$$\eta_m = \sum_{m_0, ..., m_n} Z^{(m)}_{m_0 ... m_n} \xi^{(0)}_{m_0} \xi^{(1)}_{m_1} ... \xi^{(n)}_{m_n}$$

où on a posé

$$[Z(X_0, ..., X_n)]^m = \sum_{m_0 ... m_n} Z^{(m)}_{m_0 ... m_n} X_0^{m_0} ... X_n^{m_n}$$

c) le polynôme cherché est l'échelle de la suite $\eta$ et on peut le calculer grâce à la formule (10).

*Second problème.* Il s'agit d'une généralisation du précédent. Soient $n+1$ polynômes $G_i(X_i)$, $i = 1, ..., n$ et $Z(X_0, ..., X_n)$, déterminer rationnellement un polynôme $H(Y)$ ayant pour racines toutes les valeurs $\omega_j$ satisfaisant à une équation du type

$$Z(\omega_j; \omega_{1,j_1}, ..., \omega_{n,j_n}) = 0$$

les $\omega_{i,j_i}$ parcourant encore l'ensemble des racines de $G$.

Algorithme 2.

a) Posons $G_0(X_0) = X_0 - Y$; on utilise l'algorithme 1 pour déterminer le polynôme $G(X)$ ($Y$ étant considéré momentanément comme une constante);