# III. MÉTHODES TRANSCENDANTES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

*alors $f$ est une fonction rationnelle.* (Le corps $\mathbf{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$).

Le théorème de Borel correspond au cas où $S$ est vide. Le principe de la démonstration du théorème ci-dessous est le suivant. On considère, pour $k$ assez grand, le déterminant du Hankel $H_N$ d'ordre $N$ de la suite $(\xi_{n+k})$ et on majore $|H_N|_v$ pour toutes les places $v$ du corps $\mathbf{Q}$:

— Si $v$ est ultramétrique et n'appartient pas à $S$, alors trivialement

$$|H_N|_v \leqslant 1 .$$

— Si $v \in S$ on utilise les inégalités de Cauchy dans $\mathbf{C}_p$.

— Si $v$ est la valeur absolue ordinaire, on utilise les inégalités de Cauchy dans $\mathbf{C}$.

Pour $k$ et $N$ assez grands, on aboutit à l'estimation

$$\prod_v |H_N|_v < 1 ,$$

qui implique $H_N = 0$. D'où la conclusion.

Une démonstration détaillée figure en [2], ainsi que celle du théorème de Polya-Bertrandias, qui généralise le théorème précédent.

## III. Méthodes transcendantes

### 1. *Minoration de* $|\xi_n|$

Grâce au théorème de Roth-Ridout, K. Mahler [35] avait obtenu une minoration non effective de $|\xi_n|$ pour une s.r.l. binaire. Les méthodes transcendantes conduisent à des résultats effectifs.

Soit $(\xi_n)$ une s.r.l. donnée par

$$\xi_n = P_1(n)\,\omega_1^n + \ldots + P_k(n)\,\omega_k^n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 , \quad \omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbf{C} \text{ distincts} .$$

On peut supposer $|\omega_1| \geqslant |\omega_2| \geqslant \ldots \geqslant |\omega_k|$. Lorsque $|\omega_1| > |\omega_2|$ on a trivialement

$$|\xi_n| \sim |P_1(n)|\,|\omega_1|^n$$

donc $|\xi_n| \geqslant \dfrac{1}{2} P_1(n)\,|\omega_1|^n$ pour $n \geqslant n_0$ (effectif).

Minorer $|\xi_n|$ n'est plus aussi facile lorsque $\omega_1$ et $\omega_2$ sont de même module. Considérons en effet le cas le plus simple où $(\xi_n)$ est réelle et donnée par $\xi_n = \omega_1^n + \omega_2^n$.

Si $\omega_1$ et $\omega_2$ sont réels alors $\omega_2 = -\omega_1$, et on a $\xi_n = 2\,\omega_1^n$ si $n$ est pair et $\xi_n = 0$ sinon. Par contre si $\omega_1$ n'est pas réel, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$ et on peut écrire $\omega_1 = \rho\, e^{i\theta}$, $\omega_2 = \rho\, e^{-i\theta}$ avec $\rho$ réel $> 0$; alors

$$\xi_n = 2\,\rho^n \cos(n\,\theta)\,, \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \pi\,.$$

Pour minorer $\xi_n$ dans ce cas il faut minorer la quantité

$$\operatorname*{Min}_{k \in \mathbf{Z}} \left| n\theta - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right|.$$

Le cas $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ correspond à une suite dégénérée, nous l'excluons. Ainsi, dans le cas non dégénéré, on aboutit à un problème d'approximation diophantienne.

Si $f$ est une fonction de $\mathbf{N}$ dans lui-même qui croît arbitrairement vite, on peut trouver $\theta$ tel que, pour une infinité de valeurs de $n$, il existe $k$ entier avec $\left| n\theta - \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \right| < 1/f(n)$. Pour obtenir une minoration non triviale de $|\,\xi_n\,|$ il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur l'approximation du quotient $\theta/\pi$ par des rationnels.

Depuis les travaux de Gel'fond, on sait que de telles hypothèses sont vérifiées lorsque $\cos\theta$ est un nombre algébrique, donc en particulier lorsque $\omega_1$ et $\omega_2$ sont algébriques. Nous nous limiterons donc à l'étude des s.r.l. à valeurs algébriques.

Définissons $s$ par

$$|\,\omega_1\,| = \ldots = |\,\omega_s\,| > |\,\omega_{s+1}\,|\,,$$

et posons $r_j = 1 + \deg(P_j)$ pour $j = 1, \ldots, k$.

La première minoration effective a été obtenue — pour les s.r.l. binaires — par A. Schinzel [55]. Un théorème plus général a été ensuite publié en [38], où on montre que sous les hypothèses $s \leqslant 3$ et $r_1 = \ldots = r_s = 1$, il existe des constantes effectives $c$ et $n_0$ telles que, pour $n \geqslant n_0$,

$$|\,\xi_n\,| \geqslant |\,\omega_1\,|^n\, n^{-c}\,, \qquad \text{pourvu que} \qquad \sum_{j=1}^{s} P_j\,.\,\omega_j^n \neq 0\,.$$

La démonstration est une application directe des estimations de A. Baker sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques [4].

Depuis ces résultats ont été étendus en [45], où le résultat suivant est démontré.

THÉORÈME. *Supposons* $s \leqslant 3$ *et qu'au moins un des nombres* $\omega_i/\omega_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant s$ *ne soit pas une racine de l'unité. Alors il existe des constantes effectivement calculables* $C_1 > 0$ *et* $C_2 > 0$ *qui ne dépendent que de* $(\xi_n)$ *telles que l'on ait*

$$|\xi_n| \geqslant |\omega_1|^n \exp(-C_1(\operatorname{Log} n)^2),$$

*pour* $n \geqslant C_2$.

La preuve repose aussi sur les minorations de Baker. Pour $s \leqslant 3$, on peut donc déterminer effectivement toutes les solutions de l'équation $\xi_n = \alpha$ pour $\alpha$ fixé.

Si on se limite à l'équation $\xi_n = 0$, on montre dans le même article que les indices $n$ peuvent être déterminés effectivement sous les hypothèses: $s = 4$, $|\omega_1| > 1$ et aucun des $\omega_i/\omega_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, n'est une racine de l'unité.

Dans le cas général, la question suivante est ouverte.

PROBLÈME. Etant donné une s.r.l. entière $(\xi_n)$, existe-t-il un algorithme permettant de trouver tous les indices $n$ tels que $\xi_n = 0$?

Nous énonçons la conjecture suivante.

CONJECTURE. Il existe un entier positif $k$ tel que, si $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}$ sont $k$ suites récurrentes linéaires entières quelconques, la propriété

$$\exists(n_1, n_2, \ldots, n_k), \qquad \xi^{(1)}_{n_1} + \ldots + \xi^{(k)}_{n_k} = 0$$

soit indécidable.

Sous certaines hypothèses (voir [45] th. 3), on peut aussi minorer $|\xi_m - \xi_n|$ de manière effective et donc alors — en principe — déterminer les répétitions de la suite (voir [44] pour un exemple).

## 2. *L'équation* $\xi_m = \eta_n$

En utilisant encore une estimation sur les formes linéaires de logarithmes, on peut montrer (cf. [41]) le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soient* $(\xi_m)$ *et* $(\eta_n)$ *deux suites récurrentes linéaires à valeurs algébriques données par*

$$\xi_m = P_1(m)\,\omega_1^m + \ldots + P_h(m)\,\omega_h^m, \qquad P_1 \neq 0,$$

*et*

$$\eta_n = Q_1(n)\,\rho_1^n + \ldots + Q_k(n)\,\rho_k^n, \qquad Q_1 \neq 0.$$

*On suppose*

$$|\omega_1| > |\omega_2| \geqslant \dots, \quad |\rho_1| > |\rho_2| \geqslant \dots, \quad |\omega_1| > 1, \quad |\rho_1| > 1.$$

*Alors,*

(i) *il existe un entier* $N_1$, *effectivement calculable, tel que pour* $m+n \geqslant N_1$ *la relation* $\xi_m = \eta_n$ *implique*

$$(*) \qquad P_1(m)\,\omega_1^m = Q_1(n)\,\rho_1^n\,;$$

(ii) *il existe un entier* $N_2$, *effectivement calculable, tel que si l'équation* (*) *admet une solution vérifiant* $m+n \geqslant N_1$, *alors* $\omega_1$ *et* $\rho_1$ *sont multiplicativement dépendants;*

(iii) *soit* $Z$ *l'ensemble des couples* $(m, n)$ *tels que* $\xi_m = \eta_n$, *alors:*

(a) *si* $P_1$ *et* $Q_1$ *sont de même degré,* $Z$ *est égal à l'union d'un ensemble fini et d'une union finie de progressions arithmétiques,*

(b) *si les degrés de* $P_1$ *et* $Q_1$ *sont distincts et si* $Z$ *est infini, cet ensemble n'est pas du type précédent et on a même*

$$\lim \operatorname{Log}(m_{k+1}/m_k) > 0\,, \quad \textit{si} \quad (m_k, n_k)$$

*désigne la suite des points de* $Z$, *ordonnée par valeurs croissantes de* $m$.

On peut noter que la preuve de (ii) est élémentaire et que le cas (b) peut se produire: exemple, $\xi_m = 2^m$ et $\eta_n = n\,2^n$. De plus, on sait décider si deux nombres algébriques sont multiplicativement indépendants ou non, donc — sous les hypothèses du théorème — on sait décider si $Z$ est fini ou non. En supposant en outre que les $|\omega_i|$ d'une part, et les $|\rho_j|$ d'autre part, sont distincts on peut même déterminer effectivement $Z$.

Le cas de l'équation $\xi_m = \xi_n$, pour une s.r.l. binaire, a été traité grâce à une méthode analogue par J. C. Parmani et T. N. Shorey [49].

## 3. *Sur le plus grand diviseur premier de* $\xi_n$

Cette question fait l'objet du long article de C. L. Stewart [58], le lecteur désirant plus de détails pourra consulter ce travail. Bien entendu, nous supposons que $(\xi_n)$ est une s.r.l. à valeurs entières. Dans l'écriture

$$\xi_n = P_1(n)\,\omega_1^n + \dots + P_k(n)\,\omega_k^n\,,$$

nous supposons de plus qu'aucun des quotients $\omega_i/\omega_j$, $i \neq j$, n'est une racine de l'unité. Enfin le plus grand diviseur d'un entier $a$ sera noté $P(a)$ (avec la convention $P(0) = P(\pm 1) = 1$).

En 1921, Polya a montré que $\limsup P(\xi_n) = \infty$. Grâce à une généralisation $p$-adique du théorème de Thue-Siegel-Roth-Schmidt (généralisation due à Schlickewei), récemment R. van der Poorten et Schlickewei ont montré [53] qu'en fait $P(\xi_n)$ tend vers l'infini, une preuve indépendante mais voisine a été donné par Evertse [24]. A ce jour, ces preuves sont ineffectives.

Grâce à la théorie des formes linéaires de logarithmes, Stewart a démontré le résultat suivant (cf. [57]).

THÉORÈME. *Si on a* $|\omega_1| > |\omega_2| \geqslant \dots |\omega_k|$ *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante effective* $N = N(\varepsilon, \omega_1, \dots, \omega_k, P_1, \dots, P_k)$ *telle que, pour* $n \geqslant N$, *on ait*

$$P(\xi_n) > (1-\varepsilon) \operatorname{Log} n$$

*lorsque* $\xi_n \neq P_1(n)\, \omega_1^n$.

Des résultats plus forts ont été démontrés pour les s.r.l. binaires, en particulier par C. L. Stewart et T. Shorey; voir [58] pour plus d'information.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ABE, E. *Hopf algebras.* Cambridge Univ. Press, 1980.

[2] AMICE, Y. *Les nombres p-adiques.* Paris, P.U.F., 1975.

[3] BACHMANN, P. *Niedere Zahlentheorie.* Zweiter teil, Leipzig, Teubner, 1910.

[4] BAKER, A. A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II. *Acta Arithm. 24* (1973), 33-36.

[5] BERSTEL, J. *Transductions and context-free languages.* Stuttgart, Teubner, 1979.

[6] BERSTEL, J. et M. MIGNOTTE. Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires. *Bull. Soc. Math. France 104* (1976), 175-184.

[7] BERSTEL, J. et REUTENAUER. *Les séries rationnelles et leurs langages.* Paris, Masson, 1984.

[8] BEUKERS, F. The multiplicity of binary recurrences. *Compositio Math. 40* (1980), 251-267.

[9] BEUKERS, F. and R. TIJDEMAN. On the multiplicity of binary complex recurrences. *Compositio Math. 51* (1984), 193-213.

[10] BOREVITCH, S. I. et I. R. SCHAFAREVITCH. *Théorie des nombres.* Paris, Gauthier-Villars, 1967.

[11] BOURBAKI, N. *Eléments de mathématiques. Algèbre, chap. 5.* Paris, Herman, 1959.

[12] CERLIENCO, L. e F. PIRAS. Risultante, m.c.m. e M.C.D. di due polinomi col metodo delle s.r.l. *Rend. Sem. Fac. Sci., Univ. Cagliari 50* (1980), 711-717.