HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

Autor(en): **Cathelineau, J. L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-87889

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1987), p. 159-173

HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

par J. L. CATHELINEAU

1. INTRODUCTION

Dans toute la suite, k est un corps de caractéristique nulle et A, une k-algèbre commutative avec un élément unité. Si $\mathfrak{g}$ est une k-algèbre de Lie, on lui associe l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_A = A \otimes_k \mathfrak{g}$$

où le crochet est défini par

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes [x, y] .$$

Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on note $< \, , \, >$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et on l'étend à $\mathfrak{g}_A$ par la formule

$$< a \otimes x, b \otimes y > \; = \; < x, y > \, ab .$$

On note $H_{*,k}(\mathfrak{g}_A)$, l'homologie de $\mathfrak{g}_A$, considérée comme k-algèbre de Lie; $H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ désigne l'homologie de $\mathfrak{g}_A$, considérée comme k-algèbre de Lie, à coefficients dans $\mathfrak{g}_A$ muni de l'action adjointe.

Remarquons que pour $\mathfrak{g}$ simple, il existe toujours une extension galoisienne, de degré fini (K, k), telle que la K-algèbre de Lie $K \otimes_k \mathfrak{g}$ soit déployée; le type de $\mathfrak{g}$ est défini alors indépendamment de K.

L'homologie du complexe de de Rham de A sur k ([Bo 1])

$$A \xrightarrow{d} \Omega^1_{A/k} \to \dots \to \Omega^n_{A/k} \dots$$

est notée $H^*_{DR}(A)$.

Le but de cet article est de calculer les groupes $H_{3,k}(\mathfrak{g}_A)$ et $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$, pour $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple; on renvoie au § 2 pour l'énoncé complet des résultats.

Ces résultats sont à rapprocher des calculs d'homologies suivants ([K]):

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k}/dA$$
$$H_{1,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{A/k},$$

qui sont valables pour une algèbre simple $\mathfrak{g}$ de type arbitraire et une k-algèbre commutative quelconque. D'ailleurs la méthode utilisée ici permet de retrouver simplement ces isomorphismes.

Dans le calcul qui nous concerne, il y a deux cas à considérer suivant le type de $\mathfrak{g}$ et cette distinction s'explique par une propriété géométrique des racines.

Voici deux cas particuliers des théorèmes 1 et 2 du § 2.

PROPOSITION 1. *Avec les hypothèses suivantes:*

(1) A *est une k-algèbre lisse ou un corps extension de* k;

(2) $\mathfrak{g}$ *est une k-algèbre de Lie simple, de type* A_1, B, C, $D_l (l \geqslant 4)$, E, F_4 ou G_2 [1]) *la forme*

$$\Lambda^3_k \mathfrak{g}_A \to A$$
$$au \wedge bv \wedge cw \mapsto <[au, bv], cw> \; = \; <[u, v], w> abc\,, \quad (au = a \otimes u)$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} H^0_{DR}(A)\,.$$

PROPOSITION 2. *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1, on a*

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) = 0\,.$$

ORIGINE DES RÉSULTATS (voir aussi [Ca 2])

Rappelons d'abord que l'étude de l'homologie des groupes de Lie, considérés comme groupes discrets, est justifiée par plusieurs domaines: fibrés plats, feuilletages, troisième problème de Hilbert, K-théorie algébrique. Citons deux exemples relatifs aux groupes $SO(3, \mathbf{R})$ et $SU(2, \mathbf{C})$:

J. L. Dupont ([D]) a montré, en rapport avec le troisième problème de Hilbert, que $H_2(SO(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3) = 0$ équivaut au fait, prouvé par J. P. Sydler ([S]), que l'invariant de Dehn et le volume sont des invariants complets pour la scission des polyèdres de $\mathbf{R}^3$; on ne dispose pas de preuve algébrique directe de la nullité du groupe $H_2(SO(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$.

---

[1]) Rappelons que $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$.

Pour $SU(2, \mathbf{C})$, il existe un homomorphisme $H_3(SU(2, \mathbf{C})) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, construit à l'aide d'une classe de Cheeger-Simons, reliée au volume sur S^3 ([Ch S], [Ch]), dont on sait qu'il ne dépend que des points algébriques de $SU(2, \mathbf{C})$ et a, par suite, une image dénombrable; mais on ignore le rang de cette image; de plus, la question a été posée de savoir si l'application $H_3(SU(2, \bar{\mathbf{Q}})) \to H_3(SU(2, \mathbf{C}))$ est surjective, où $\bar{\mathbf{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

Les résultats sont reliés à l'aspect « infinitésimal » de ces questions. On prend $A = \mathbf{R}$, $k = \mathbf{Q}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{Q})$, l'algèbre des matrices antisymétriques à coefficients rationnels qui est isomorphe à $\mathfrak{su}(2, \mathbf{Q}[\sqrt{-1}])$. Alors $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$ $(\simeq \mathfrak{su}(2, \mathbf{C}))$.

Comme cas très particuliers des propositions 1 et 2 ci-dessus, on obtient:

i) *Il existe des isomorphismes de* $\mathbf{Q}$*-espaces vectoriels*

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \bar{\mathbf{Q}})) \xrightarrow{\sim} H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{su}(2, \mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$$

où $\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ *est l'ensemble des nombres algébriques réels.*

ii) *Le groupe d'homologie* $H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R}), \mathbf{R}^3)$ *est nul.*

Applications à l'homologie des algèbres de lacets

Pour $\mathfrak{g}$ une algèbre simple complexe, soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de lacets ([Ka])

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{g},$$

considérée comme $\mathbf{C}$-algèbre; on a comme conséquence facile des théorèmes 1 et 2

$$H_3(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq \mathbf{C},$$
$$H_2(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}) = 0,$$

et ceci est indépendant du type de $\mathfrak{g}$.

J'ai bénéficié, pour cet article, des remarques et suggestions de J. Carmona, P. Cartier et Ch. Kassel.

2. Préliminaires et énoncé des résultats

On renvoie à l'article [L Q] de J. L. Loday et D. Quillen, pour la notion d'homologie cyclique d'une algèbre (voir aussi l'article de synthèse [Ca]).

On s'intéresse ici à une notion analogue, où le groupe cyclique est remplacé par le groupe diédrale. Cette notion d'homologie diédrale est due à J. L. Loday ([L]), dont nous utiliserons les notations.

Pour ne pas compliquer, nous supposons toujours que A est commutative, sur k de caractéristique nulle.

On note A^n la puissance tensorielle n-ième de A sur k et on pose

$$C_n = A^{n+1}/\mathscr{D}_{n+1},$$

où $\mathscr{D}_{n+1}$ est le k-sous-espace de A^{n+1} engendré par les $(a_0, ..., a_n)$ où l'une des composantes $a_1, a_2, ..., a_n$ est égale à 1 $\big((a_0, a_1, ..., a_n)$ est écrit pour $a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n\big)$.

On introduit de plus comme dans [L] s, X, B, b définis par:

$$s(a_0, ..., a_n) = (1, a_0, ..., a_n)$$

$$X(a_0, ..., a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, ..., a_{n-1})$$

$$B = sL \quad \text{où} \quad L = 1 + X + ... + X^{n-1}$$

$$b(a_0, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_n) + (-1)^n (a_n a_0, ..., a_{n-1});$$

On considère de plus l'involution de C_n, donnée par

$$Y : C_n \to C_n$$

$$(a_0, ..., a_n) \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1);$$

$C_n^+ \oplus C_n^-$ est la décomposition de C_n par rapport à Y.

L'homologie diédrale de A est définie comme l'homologie du complexe

$$(C_*/_{1-X,\,1+Y}, b)$$

ou, ce qui est la même chose, l'homologie du complexe

$$(A^{*+1}/_{1-X,\,1+Y}, b);$$

On note cette homologie $HD_*(A)$. (Elle est notée ${}_{-1}HD_*(A)$ dans [L]).

En procédant comme dans [L], on montre que $HD_*(A)$ s'identifie à l'homologie du bicomplexe $\mathbf{B}^-$ suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_2^- & \xleftarrow{B} & C_1^+ & \xleftarrow{B} & C_0^- \\
{}^b\downarrow & & {}^b\downarrow & & \\
C_1^- & \xleftarrow{B} & C_0^+ & & \\
{}^b\downarrow & & & & \\
C_0^- & & & &
\end{array}$$

Soit $(\Omega^*_{A/k}, d)$ le complexe de de Rham. L'involution de $\Omega^*_{A/k}$ donnée par

$$\tilde{Y}(a_0 da_1 \dots da_n) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0 da_n da_{n-1} \dots da_1 ,$$

a pour restriction à $\Omega^n_{A/k}$, l'identité si n est pair, moins l'identité si n est impair; on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \mu : \quad & C_* \to \Omega^*_{A/k} \\ (a_0, \dots, a_n) & \mapsto \frac{1}{n!} a_0 da_1 \dots da_n , \end{aligned}$$

induit un morphisme de bicomplexes de $\mathbf{B}^-$ dans le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Omega^3_{A/k} & \overset{d}{\leftarrow} & \Omega^2_{A/k} & \overset{d}{\leftarrow} & \Omega^1_{A/k} & \overset{d}{\leftarrow} & \Omega^0_{A/k} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
\Omega^1_{A/k} & \overset{d}{\leftarrow} & \Omega^0_{A/k} & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Dans le cas où l'homologie de Hochschild de A est donnée par les formes différentielles (voir la remarque ci-dessous), on en déduit, tout comme dans [L Q], des isomorphismes

$$\begin{aligned}
& HD_0(A) = 0 \\
& HD_1 \simeq \Omega^1_{A/k}/dA \\
& HD_2(A) \simeq H^0_{DR}(A) \\
& \dots \\
& \dots \\
& HD_{2n}(A) \simeq H^{2n-2}_{DR}(A) \oplus H^{2n-6}_{DR}(A) \oplus \dots \\
& HD_{2n+1}(A) \simeq \Omega^{2n+1}_{A/k}/d\,\Omega^{2n}_{A/k} \oplus H^{2n-3}_{DR}(A) \oplus H^{2n-7}_{DR}(A) \oplus \dots
\end{aligned}$$

Nous utiliserons les remarques suivantes:

i) D'après [H.K.R.], ces isomorphismes sont valables si A est une k-algèbre lisse.

Ils sont aussi vrais si A est un corps, extension de k; il faut vérifier que sous cette hypothèse, on a pour l'homologie de Hochschild

$$H_*(A) \simeq \Omega^*_{A/k};$$

le fait est noté dans [H.K.R.] (5.3), si A est une extension finiment engendrée de k; un argument de limites inductives permet de lever la restriction.

ii) L'isomorphisme

$$HD_2(A) \xrightarrow{\sim} H^0_{DR}(A),$$

est induit par l'application

$$A^3 \to A$$
$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 a_1 a_2 .$$

iii) La partie négative de l'homologie de Hochschild $H_*(A)$, pour l'involution Y, est notée $H^-_*(A)$. Si A est lisse ou un corps extension de k, on a

$$H^-_{2n}(A) = 0$$
$$H^-_{2n+1}(A) \simeq \Omega^{2n+1}_{A/k} .$$

On peut maintenant énoncer:

THÉORÈME 1. *Soit A une k-algèbre commutative, avec unité et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie simple. Si $\mathfrak{g}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$:*

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HC_2(A);$$

dans tous les autres cas:

$$H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \simeq HD_2(A).$$

(HC_* est l'homologie cyclique et les isomorphismes sont des isomorphismes de k-espaces vectoriels).

THÉORÈME 2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1, si $\mathfrak{g}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$:*

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2(A);$$

dans tous les autres cas:

$$H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \simeq H_2^-(A).$$

(Ici les isomorphismes sont des isomorphismes de A-modules.)

Le cas particulier suivant semble intéressant (voir introduction): si $\mathfrak{l}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie réelle simple, non de type $A_n (n \geqslant 2)$

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = 0,$$

où l'homologie est prise au sens des algèbres rationnelles;

Par contre, si $\mathfrak{l}$ est de type $A_n (n \geqslant 2)$, on a

$$H_{3,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}) \simeq (\bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}) \oplus (\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}})$$
$$H_{2,\mathbf{Q}}(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \simeq \Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}};$$

et on sait que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}/d\,\Omega^1_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu, et que $\Omega^2_{\mathbf{R}/\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, de dimension la puissance du continu.

Comme me l'a fait remarquer Ch. Kassel, le cas du type $A_n (n \geqslant 2)$ est implicitement contenu dans [LQ] et [G]. Sans revenir en détail sur ce cas, on fera quelques remarques au § 4.

3. Cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas de type $A_n (n \geqslant 2)$

Calcul de certains espaces de coinvariants

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une k-algèbre déployée, d'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et de système de racines Δ. $(h_\alpha, e_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ est une famille de générateurs de Chevalley telle que

$$\forall \alpha \in \Delta, [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_\alpha, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$
$$R = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\} \quad \text{est une base de } \Delta.$$

Tous les produits tensoriels et extérieurs sont pris sur k; $(\ )_{\mathfrak{g}}$ désigne l'espace des coinvariants d'un $\mathfrak{g}$-module.

Dans ce paragraphe, A est une k-algèbre commutative quelconque.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *simple déployée sur* k. *La forme de Killing*

$$< \ , \ >: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels:

$$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} k\,.$$

En effet:

$$(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \simeq (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq (\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$$

car $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}^*$ comme $\mathfrak{g}$-module. De plus $\mathfrak{g}$ simple entraîne

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq k\,.$$

En utilisant des formules connues pour la forme de Killing ([Bo2]), on en déduit les relations suivantes dans $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned}
&[e_\alpha\otimes e_\beta] = 0, \quad \text{si} \quad \alpha+\beta\neq 0\\
&[e_\alpha\otimes h_\beta] = [h_\beta\otimes e_\alpha] = 0\\
(1)\qquad &[h_\alpha\otimes h_\beta] = \alpha(h_\beta)\,[e_{-\alpha}\otimes e_\alpha] = \beta(h_\alpha)\,[e_\beta\otimes e_{-\beta}]\\
&(\alpha,\alpha)\,[h_\alpha\otimes h_\alpha] = (\beta,\beta)\,[h_\beta\otimes h_\beta]\,,
\end{aligned}$$

où [ ] est la classe dans $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ et (,) la forme sur $\mathfrak{h}^*$ associée à $<\ ,\ >$.

En utilisant l'identification ([L-Q])

$$(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A) \simeq ((\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \otimes (A\otimes A)) \otimes_{\mathfrak{S}_2} (sgn)$$

où (sgn) désigne k, muni de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ donné par la signature, on obtient:

LEMME 2. *L'espace des coinvariants* $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie canoniquement à* $A \wedge A$, *par l'application*

$$a \wedge b \mapsto (\alpha,\alpha)\,[ah_\alpha \wedge bh_\alpha]$$

($\alpha\in\Delta$, arbitraire).

ah_α est mis pour $a\otimes h_\alpha$; $\mathfrak{g}$ est considérée comme sous-algèbre de $\mathfrak{g}_A$ et opère dans $\mathfrak{g}_A$ par l'action adjointe.

Notons dans $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ les relations suivantes:

$$(2)\qquad \begin{aligned}[ah_\alpha \wedge bh_\alpha] &= 2\,[ae_\alpha \wedge be_{-\alpha}]\\ &= 2\,[ae_{-\alpha} \wedge be_\alpha]\end{aligned}$$

LEMME 3. *Soit* $\mathfrak{g}$ *simple déployée sur* k, *de type* $A_1, B, C, D_l (l\geqslant 4)$, E, F_4 *ou* G_2, *la forme antisymétrique*

$$\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$$
$$(u, v, w) \mapsto <[u, v], w>$$

induit un isomorphisme de k-espaces vectoriels:

$$(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\sim} k .$$

Il suffit de montrer que $\dim_k((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) = 1$. Pour cela, nous utiliserons un résultat de Kostant-Parthasaraty-Rao-Varadarajan ([P.R.V.]).

Soit ω la plus grande racine de Δ qui est le poids dominant de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, notée π_ω. On a

$$\begin{aligned} \dim_k((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) &= \dim_k((\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}) \\ &= (\pi_\omega, \pi_\omega \otimes \pi_\omega) \end{aligned}$$

où $(\pi_\omega, \pi_\omega \otimes \pi_\omega)$ est la multiplicité de π_ω dans $\pi_\omega \otimes \pi_\omega$. Par la formule de multiplicité du théorème 2.1 de [P.R.V.], on peut écrire

$$(\pi_\omega, \pi_\omega \otimes \pi_\omega) = \dim_k V ,$$

où

$$V = \{v \in \mathfrak{h} ; (\mathrm{ad}\, e_{\alpha_i})^{\omega(h_{\alpha_i})+1}(v) = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., l\} ;$$

en effet avec les notations de [P.R.V.], on a

$$(\pi_\omega, \pi_\omega \otimes \pi_\omega) = m^+(\omega ; 0, \omega) = m^-(\omega ; 0, \omega) .$$

On fait alors l'observation cruciale suivante:

si (Δ, R) est un système de racines de type A_1, B, C, $D_l (l \geqslant 4)$, E, F_4 ou G_2, la plus grande racine ω est orthogonale à toutes les racines de la base R sauf exactement une qu'on supposera être α_l; cela se vérifie facilement en utilisant, par exemple, les planches du chapitre VI de [Bo 2].

Par suite

$$V \subset \{v \in \mathfrak{h} ; \alpha_i(v) = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., l - 1\} ;$$

en fait V n'est pas réduit à $\{0\}$, car ϕ est non triviale et donc

$$\dim_k V = 1 \qquad (\text{engendré par } h_{\alpha_l})$$

d'où le lemme.

On déduit aussitôt de ce lemme, à l'aide de ϕ les relations suivantes dans $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$:

(3) $\quad \forall \alpha, \beta \in \Delta , \quad (\alpha, \alpha) [h_\alpha \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha}] = (\beta, \beta) [h_\beta \otimes e_\beta \otimes e_{-\beta}] \neq 0 ;$

de plus le symbole $[h_\alpha \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha}]$ est antisymétrique; on en tire:

LEMME 4. *(Avec les hypothèses du lemme 3).* $(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie canoniquement à la puissance symétrique (sur k)* S^3A, *par l'application*

$$a \,.\, b \,.\, c \mapsto (\alpha, \alpha)\, [ah_\alpha \wedge be_\alpha \wedge ce_{-\alpha}] \,.$$

De façon analogue, $(\mathfrak{g}_A \otimes (\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A))_{\mathfrak{g}}$ *s'identifie à* $A \otimes S^2A$ *par*

$$a \otimes b \,.\, c \mapsto (\alpha, \alpha)\, [ah_\alpha \otimes (be_\alpha \wedge ce_{-\alpha})] \,.$$

Il suffit d'utiliser les isomorphismes ([LQ])

$$(\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} \simeq ((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \otimes (A \otimes A \otimes A)) \otimes_{\mathfrak{S}_3} (sgn)$$
$$(\mathfrak{g}_A \otimes (\mathfrak{g}_A \wedge \mathfrak{g}_A))_{\mathfrak{g}} \simeq ((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}} \otimes (A \otimes A \otimes A)) \otimes_{\mathfrak{S}_2} (sgn) \,.$$

LEMME 5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *déployée sur k. Dans* $(\otimes^4 \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$ *on a les relations*

$$\forall \alpha \in \Delta,\ [e_\alpha \otimes e_{-\alpha} \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha}] = [e_{-\alpha} \otimes e_\alpha \otimes e_{-\alpha} \otimes e_\alpha] \,.$$

Pour cela, on remarque d'abord que, par un argument de formule de Taylor, le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$ opère trivialement dans $(\otimes^n \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$.

Soit alors l'automorphisme élémentaire ([Bo 2], VIII, § 2...)

$$\Theta_\alpha = \exp(\operatorname{ad} e_\alpha) \exp(\operatorname{ad} e_{-\alpha}) \exp(\operatorname{ad} e_\alpha) \,;$$

il vérifie ([Bo 2])

$$\Theta_\alpha(e_\alpha) = e_{-\alpha} \,, \qquad \Theta_\alpha(e_{-\alpha}) = e_\alpha \,,$$

d'où le lemme.

PREUVE DES RÉSULTATS. (Pour $\mathfrak{g}$ non de type A_n, $n \geqslant 2$)

Soit $(\wedge^* \mathfrak{g}_A, d)$ et $(\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A), d)$, les complexes habituels d'homologie

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \quad \text{et} \quad H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \,.$$

Le résultat suivant de [L-Q], permet de se ramener aux coinvariants:

LEMME 6 ([L-Q]). *Si* $\mathfrak{g}$ *est déployée, les homomorphismes de complexes*

$$(\wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \quad \to ((\wedge^* \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}, d)$$
$$(\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \to ((\mathfrak{g}_A \otimes \wedge^* \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}}, d) \,,$$

sont des quasi-isomorphismes.

On prouve d'abord les théorèmes 1 et 2 dans le cas où $\mathfrak{g}$ est déployée sur k non du type $A_n (n \geqslant 2)$.

Les résultats qui précèdent permettent de construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A^4/_{1-X,\,1+Y} & \xrightarrow{b} & A^3/_{1-X,\,1+Y} & \xrightarrow{b} & A^2/_{1-X,\,1+Y} \\ {\scriptstyle \lambda_4}\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_3}\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_2}\downarrow \\ (\wedge^4 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{d} & (\wedge^3 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{d} & (\wedge^2 \mathfrak{g}_A)_{\mathfrak{g}} \end{array}$$

où les λ_i, $i = 2, 3, 4$, sont définis par

$$\begin{aligned} \lambda_2(a_0, a_1) &= [a_0 h_\alpha \wedge a_1 h_\alpha] \\ \lambda_3(a_0, a_1, a_2) &= [a_0 h_\alpha \wedge a_1 e_\alpha \wedge a_2 e_{-\alpha}] \\ \lambda_4(a_0, a_1, a_2, a_3) &= [a_0 e_\alpha \wedge a_1 e_{-\alpha} \wedge a_2 e_\alpha \wedge a_3 e_{-\alpha}], \end{aligned}$$

$\alpha \in \Delta$ étant une racine fixée. Notons que

$$A^3/_{1-X,\,1+Y} \simeq S^3 A \quad \text{et} \quad A^2/_{1-X,\,1+Y} \simeq \wedge^2 A,$$

et par suite, λ_2 et λ_3 sont bijectives, grâce aux lemmes 4 et 6.

On en déduit une surjection

$$HD_2(A) \xrightarrow{\tilde{\lambda}_3} H_{3,k}(\mathfrak{g}_A).$$

D'autre part, on a pour toute k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, un morphisme de complexes

$$L : (\wedge^* \mathfrak{g}_A, d) \to (A^*/_{1-X,\,1+Y}, b)$$

défini par

$$\begin{aligned} &L(a_0 u_0 \wedge a_1 u_1 \wedge \ldots \wedge a_n u_n) \\ &= (-1) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_{\sigma(1)}) \circ \ldots \circ \operatorname{ad} u_{\sigma(n)})\,(a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

et par suite une application

$$\tilde{L}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{g}_A) \to HD_2(A),$$

où $\tilde{L}_3$ est induite par

$$\begin{aligned} L_3(a_0 u_0 \wedge a_1 u_1 \wedge a_2 u_2) &= \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_1 \circ \operatorname{ad} u_2)\,(a_0, a_1, a_2) \\ &- \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad} u_2 \circ \operatorname{ad} u_1)\,(a_0, a_2, a_1) \\ &= \operatorname{Trace}(\operatorname{ad} u_0 \circ \operatorname{ad}[u_1, u_2])\,(a_0, a_1, a_2) \\ &= \langle u_0, [u_1, u_2] \rangle\,(a_0, a_1, a_2). \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que

$$\tilde{L}_3 \circ \tilde{\lambda}_3 = <h_\alpha, h_\alpha> \mathrm{Id}\,,$$

et par suite $\tilde{L}_3$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

En ce qui concerne le calcul du $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ on procède de manière analogue, en remplaçant le complexe $(A^*/_{1-X,\,1+Y}, b)$, par le complexe $(A^*/_{1+Y}, b)$, dont l'homologie est $H_*^-(A)$.

Enfin on ramène facilement le cas général au cas déployé; en effet supposons que (L, k) soit une extension galoisienne, de degré fini, telle que $\mathfrak{g} \otimes_k L$ soit déployée sur L. On applique ce que l'on vient de démontrer à la situation:

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k L\,, \qquad A' = A \otimes_k L\,, \qquad \mathfrak{g}'_{A'} = \mathfrak{g}' \otimes_k A' = \mathfrak{g}_A \otimes_k L\,.$$

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que l'on a des isomorphismes

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$
$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L, \mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$

où $G_{L/k}$ est le groupe de Galois de (L, k): ce groupe est fini et on est en caractéristique nulle.

4. Remarques sur le cas de $\mathfrak{sl}(r, A)$, $r \geqslant 3$

Soit $\mathfrak{sl}(r, A) \simeq A \otimes \mathfrak{sl}(n, k)$, l'algèbre de Lie des $r \times r$ matrices de trace nulle. Explicitons l'isomorphisme

$$\tilde{\mathscr{L}}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{sl}(r, A)) \to HC_2(A)\,,$$

induit (pour $r \geqslant 3$), par l'application de [LQ]:

$$\mathscr{L}(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge \ldots \wedge a_n X_n)$$
$$= (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \,\mathrm{Trace}\,(X_0 X_{\sigma(-1)} \ldots X_{\sigma(n)})\,(a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})\,;$$

(L'application L considérée dans le paragraphe précédent ne convient pas ici). On peut écrire

$$\mathscr{L}_3(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge a_2 X_2)$$
$$= \mathrm{Trace}\,(X_0 X_1 X_2)\,(a_0, a_1, a_2) - \mathrm{Trace}\,(X_0 X_2 X_1)\,(a_0, a_2, a_1)$$
$$= \frac{1}{2}\,\psi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) - (a_0, a_2, a_1))$$
$$+ \frac{1}{2}\,\phi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) + (a_0, a_2, a_1))$$

où

$$\phi(X_0, X_1, X_2) = \mathrm{Trace}\,(X_0[X_1, X_2])$$

et

$$\psi(X_0, X_1, X_2) = \mathrm{Trace}\,(X_0X_1X_2 + X_0X_2X_1)$$

sont des 3-formes invariantes sur $\mathfrak{sl}(r, k)$, respectivement antisymétrique et symétrique.

Lorsque A est lisse ou un corps extension de k, on sait que

$$HC_2(A) \simeq H^0_{DR}(A) \oplus (\Omega^2_{A/k}/d\,\Omega^1_{A/k})\,;$$

L'isomorphisme ci-dessus s'explicite alors par l'application

$$a_0X_0 \wedge a_1X_1 \wedge a_2X_2 \mapsto \psi(X_0, X_1, X_2)a_0a_1a_2 + \phi(X_0, X_1, X_2)a_0da_1da_2\,.$$

Esquissons une preuve; on note d'abord l'analogue des lemmes 3 et 4. Soit H, E_+, E_-, H', les matrices de $\mathfrak{sl}(r, k)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où M est donné respectivement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

alors on a:

$(\otimes^3 \mathfrak{sl}(r, k))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$ est de dimension 2, engendré par

$$[H \otimes E_+ \otimes E_-] \quad \text{et} \quad [H \otimes H \otimes H']\,;$$

de plus l'application

$$S^3A \oplus \wedge^3 A \to (\wedge^3 \mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$$

donnée par

$$a\,.\,b\,.\,c \mapsto [aH \wedge bE_+ \wedge c\,E_-]$$
$$a \wedge b \wedge c \mapsto [aH \wedge bH \wedge c\,H']$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Une méthode pour prouver cela consiste à utiliser l'argument géométrique suivant sur les systèmes de racines:

Pour un système de racines Δ de base R de type $A_n (n \geqslant 2)$, la plus grande racine est orthogonale à toutes les racines de la base sauf exactement 2.

Enfin on obtient un inverse de $\tilde{\mathscr{L}}_3$ à partir du morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc} A^4/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^3/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^2/_{1-X} \\ \mu_4 \downarrow & & \mu_3 \downarrow & & \mu_2 \downarrow \\ \wedge^4(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^3(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^2(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} \end{array}$$

$$\mu_2((a_0, a_1)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H],$$

$$\mu_3((a_0, a_1, a_2)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 E_+ \wedge a_2 E_-] + \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H \wedge a_2 H'],$$

$$\mu_4((a_0, a_1, a_2, a_3)) = \frac{1}{4}[a_0 E_+ \wedge a_1 E_- \wedge a_2 E_+ \wedge a_3 E_-]$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in G} \varepsilon_\sigma [a_{\sigma(0)} H \wedge a_{\sigma(1)} H \wedge a_{\sigma(2)} E'_+ \wedge a_{\sigma(3)} E'_-]$$

où G est le groupe cyclique engendré par le cycle $(0, 1, 2, 3)$, et où E'_+ et E'_- proviennent des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a une approche analogue pour $H_{2,k}(\mathfrak{sl}(r, A), \mathfrak{sl}(r, A))$ $(r \geqslant 3)$.

En écrivant les lignes qui précèdent, l'auteur était motivé par l'homologie des groupes algébriques simples (éventuellement réels). Que connaît-on d'analogue au théorème 1 et 2 dans ce contexte?

La situation pour $SL(r, A)$ est assez bien comprise grâce à la K-théorie algébrique et à l'article récent [G].

Dans le cas des groupes algébriques réels simples, il y a des résultats dans [D], [D-S], [P-S]; en particulier l'analogue de théorème 2 est connu pour $SO(n, \mathbf{R})$, comme conséquence du théorème de Sydler [S].

RÉFÉRENCES

[Bo 1] BOURBAKI, N. *Algèbre, Chap. 10; Algèbre homologique.* Masson 1980.

[Bo 2] —— *Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV-VIII.* Paris.

[Ca] CARTIER, P. Homologie cyclique: rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen... *Séminaire Bourbaki, 36e année, 621, Fév. 1984, Astérisque nos 121-122.*

[Ca 2] —— Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert. *Sém. Bourbaki, 37e année, 646, Juin 1985, Astérisque nos 133-134.*

[C] CATHELINEAU, J. L. Sur l'homologie de l'algèbre de Lie de $SO(3, \mathbf{R})$, considérée comme algèbre de Lie sur $\mathbf{Z}$. *C.R.A.S. Paris 294* (1982), 737-740.

[Ch] CHEEGER, J. and J. SIMONS. Differential characters and geometric invariants. *Lecture notes in Math., no 1167,* 50-80.

[D] DUPONT, J. L. Algebra of polytopes and homology of flag complexes. *Osaka J. of Math. 19* (1982), 599-641.

[D S] DUPONT, J. L. and C. H. SAH. Scissors congruences, II. *J. of Pure Appl. Algebra 25 (2)* (1982), 159-195.

[G] GOODWILLIE, T. G. On the general linear group and Hochschild homology. *Annals of Math. 121* (1985), 383-407.

[H.K.R.] HOCHSCHILD, G., B. KOSTANT and A. ROSENBERG. Differential forms on regular affine algebras. *Trans. A.M.S. 104* (1962), 383-408.

[Ka] KAC, V. G. *Infinite dimensional Lie algebra.* Birkhäuser, 1983.

[K] KASSEL, C. Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra. *J. of Pure Appl. Algebra 34* (1984), 265-275.

[L] LODAY, J. L. Homologie diédrale et quaternionique. A paraître à *Adv. in Math.*

[L Q] LODAY, J. L. and D. QUILLEN. Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. *Comm. Math. Helv. 59* (1984), 565-591.

[P.R.V.] PARTHASARATHY, K. R., R. RANGA RAO and V. S. VARADARAJAN. Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras. *Ann. of Math. 85* (1967), 383-429.

[P.S.] PARRY, W. and C. H. SAH. Third Homology of $SL(2, \mathbf{R})$ made discrete. *J. of Pure Appl. Algebra 30* (1983), 181-209.

[S] SYDLER, J. P. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comm. Math. Helv. 40* (1965), 43-80.

(Reçu le 18 décembre 1985)

J. L. Cathelineau

Université de Nice
U.A. C.N.R.S. 168
Parc Valrose
F-06034 — Nice Cedex