UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE

Autor(en): **Lion, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-56586

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 13-21

UNE CARACTÉRISATION DES NORMES EUCLIDIENNES EN DIMENSION FINIE

par Georges LION

INTRODUCTION

Depuis l'énoncé de la relation du parallélogramme, par Jordan et Von Neumann (voir [5]), sont apparues de nombreuses caractérisations des structures euclidiennes sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie n (voir [1] et [7]). Ces caractérisations sont assez souvent énoncées sous forme de théorèmes *d'existence* (par exemple existence de projecteurs par A. Robert dans [9]), mettant en lumière la « richesse » spécifique des structures euclidiennes au sein des structures d'espaces normés. D'autres caractérisations sont données par J. W. Robbin [8] et H. Rosenthal [10], respectivement en termes d'algèbres de Lie, et de dimension.

C'est dans cet esprit que nous nous proposons de caractériser les structures euclidiennes par une propriété de l'ensemble des isométries qui leur sont attachées :

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E, muni de la norme des opérateurs, la boule unité admet pour seuls points extrémaux les isométries de E si, et seulement si, E est euclidien.

Résumons les étapes de la démonstration. Si N désigne la norme étudiée, et $\mathscr{G}_N$ le groupe des isométries linéaires associées à N, il existe alors une structure euclidienne sur E, telle que tout élément de $\mathscr{G}_N$ soit une isométrie euclidienne. Le résultat, vrai pour tout groupe compact, et déjà signalé dans [10], est un cas particulier du fait que toute représentation linéaire d'un groupe compact est unitaire.

L'inclusion de $\mathscr{G}_N$ étant établie, on démontre que, si N n'est pas euclidienne, la structure de la boule unité B_N permet de définir un projecteur de norme 1 qui n'est pas barycentre d'isométries.

En revanche, dans un espace euclidien, tout endomorphisme de E de norme $\leqslant 1$, est barycentre d'isométries ; c'est un cas très particulier de la version réelle du théorème de Russo Dye (voir [3], [6], [11]).

Notre travail s'achève par l'étude d'un exemple qui illustre doublement ce qui précède: à la structure euclidienne dans $\mathbf{R}^2$, correspond la norme des opérateurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $\mathbf{R}$ espace de dimension 4; ainsi apparaît une norme non euclidienne dans $\mathbf{R}^4$. Mais l'introduction des opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ permet de surcroît d'identifier $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ à $\mathbf{C}^2$, et de reconnaître dans la norme étudiée la norme l^1 de $\mathbf{C}^2$. Si Γ désigne le groupe des isométries $\mathbf{R}$ linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on peut distinguer dans Γ trois sous-groupes intéressants:

1) *Un sous-groupe isomorphe à* $O(2) \times O(2)$.

2) *Le groupe des éléments de* Γ *de déterminant* $+1$, image de $O(2) \times O(2)$ par la représentation d'indice 2 définie ainsi: Si v et w appartiennent à $O(2)$, on note $\Phi_{v,w}$ l'application $u \mapsto vuw^{-1}$, de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même; $\Phi_{v,w}$ est une isométrie de déterminant 1, et toute telle isométrie peut s'écrire $\Phi_{v,w}$ pour un double choix du couple (v, w).

3) *Le groupe des éléments* $\mathbf{C}$*-linéaires de* Γ, dans lequel opère naturellement le groupe c_2 à 2 éléments, ce qui le rend isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Je remercie le référé pour la documentation intéressante qu'il m'a signalée.

I. Groupe des isométries linéaires

Dans ce paragraphe p désigne une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs strictement positives hors de 0, positivement homogène (pour que p soit une norme il faudrait en plus que p soit symétrique et sous additive).

On note $\mathscr{G}_p$ l'ensemble des applications linéaires u de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, telles que $p \circ u = p$.

Lemme 1. *$\mathscr{G}_p$ est un groupe compact.*

Démonstration. $\mathscr{G}_p$ est stable pour la composition des applications; tout u de $\mathscr{G}_p$ est inversible car la relation $u(x) = 0$ implique $p(x) = p \circ u(x) = 0$, d'où $x = 0$. $\mathscr{G}_p$ est fermé en vertu de la continuité de p.

Etant continue, p atteint sur la sphère euclidienne unité une borne inférieure $a > 0$, et une borne supérieure A; on a donc, pour $u \in \mathscr{G}_p$:

$$A \parallel x \parallel \geqslant p(x) = p \circ u(x) \geqslant a \parallel u(x) \parallel .$$

Par conséquent $\mathscr{G}_p$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, normé par

$$\| u \| = \sup_{\| x \| = 1} \| u(x) \| .$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact $\mathscr{G}$ contenu dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe une forme quadratique Φ, à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe $\mathscr{G}$, et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathscr{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G, on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K, tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme N, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme $\mathscr{N}$ des opérateurs:

$$\mathscr{N}(u) = \sup_{N(x) = 1} N \circ u(x) .$$

Soit $\mathscr{B}_N$ la boule unité fermée de $\mathscr{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit N non euclidienne, $\mathscr{G}_N$ l'ensemble des isométries linéaires pour N, $\mathscr{K}_N$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathscr{G}_N$. Alors l'inclusion $\mathscr{K}_N \subset \mathscr{B}_N$ est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par $\mathscr{G}_N$. Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon $\mathscr{G}_N$ est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E

Par ailleurs posons $B_N = \{x \in E \mid N(x) \leqslant 1\}$; si B_N était une boule euclidienne, la norme N serait proportionnelle à la norme euclidienne de E, et serait elle aussi euclidienne.

Il existe donc deux éléments de E, notés x_1 et x_2, tels que $N(x_1) = N(x_2) = 1$, et que x_1 et x_2 soient de normes euclidiennes distinctes; x_1 et x_2 engendrent un espace vectoriel F de dimension 2, et $B_N \cap F$ n'est pas un « disque ». Nous allons montrer par l'absurde que $B_N \cap F$ admet en au moins un point x_0 une droite d'appui D_0 (voir [2] § 5, déf. 3) non orthogonale à x_0.

Si ce n'était pas le cas, la frontière du convexe $B_N \cap F$ pourrait alors être définie par une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$, où f serait dérivable par suite de l'unicité de la droite d'appui (voir [9]); mais cette droite d'appui étant orthogonale au « rayon », on aurait nécessairement $f'(\theta) = 0$ pour tout θ, donc $f(\theta)$ constante, ce qui contredit le fait que x_1 et x_2 sont de normes euclidiennes distinctes.

L'existence de x_0 est donc établie; en vertu du théorème de Hahn Banach (voir [2] § 5), B_N admet en x_0 un hyperplan d'appui H_0 contenant D_0, donc non orthogonal à x_0 (notons que H_0 peut ici être construit par récurrence puisque la dimension de E est finie). Par symétrie, B_N admet en $-x_0$ un hyperplan d'appui parallèle à H_0.

Soit v la projection de E sur $\mathbf{R}x_0$, parallèlement à H_0. On a $v(B_N) \subset B_N$, donc $\mathcal{N}(v) = 1$, et $v \in \mathcal{B}_N$. Par ailleurs $\| v \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| v(x) \| > 1$, car v augmente strictement la norme euclidienne de tout vecteur non nul orthogonal à H_0. Nous allons montrer que v appartient à $\mathcal{B}_N \backslash \mathcal{K}_N$.

Remarquons d'abord que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, et donc tout élément de $\mathcal{K}_N$ peut s'exprimer comme barycentre d'au plus $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{G}_N$ (théorème de Carathéodory, [2] § 2 exercice 9).

Si l'on avait $v \in \mathcal{K}_N$, il existerait alors

$$\begin{cases} v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathcal{G}_N \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in]0, 1[\end{cases} \qquad (m \leqslant n^2 + 1)$$

tels que $v = \sum_1^m \alpha_i v_i$ et $1 = \sum_1^m \alpha_i$. Chaque v_i est une isométrie euclidienne (inclusion de $\mathcal{G}_N$); on aurait donc

$$1 < \| v \| \leqslant \sum_1^m \alpha_i \| v_i \| = \sum_1^m \alpha_i = 1 ; \qquad \text{d'où la contradiction .}$$

LEMME 2. *Munissons E d'une norme euclidienne; soit $\mathscr{B}$ la boule unité qu'on en déduit dans $\mathscr{L}(E)$. Alors tout élément extrémal* ([2] § 7, déf. 1) *de $\mathscr{B}$ est une isométrie euclidienne de E.*

Démonstration. On suppose le résultat acquis pour la dimension $n-1$; soit $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $\| u \| = 1$, mais que u ne soit pas une isométrie. Il existe $x_1 \in E$, tel que $\| u(x_1) \| = \| x_1 \| > 0$; composant u avec une rotation, on se ramène au cas où $u(x_1) = x_1$.

L'orthogonal V de x_1 est stable par u; en effet pour $y \in V$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\| u(x_1+ty) \|^2 \leqslant \| x_1 + ty \|^2 ,$$

c'est-à-dire

$$\| u(x_1) \|^2 + 2t(x_1 \mid u(y)) + t^2 \| u(y) \|^2 \leqslant \| x_1 \|^2 + t^2 \| y \|^2 ,$$

d'où $(x_1 \mid u(y)) = 0$, $u(y) \in V$, $u(V) \subset V$.

Mais la restriction de u à V n'est pas une isométrie (car alors u en serait une). D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$u \mid_V = (u_1+u_2)/2 , \quad \text{où} \quad u_1 \neq u_2 \quad \text{et} \quad \| u_1 \| = \| u_2 \| = 1 .$$

On peut prolonger u_1 et u_2, de V à E, en $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2 \in \mathscr{B}$ tels que les restrictions de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$ à $\mathbf{R}x_1$ soient l'identité. Comme $u = (\tilde{u}_1+\tilde{u}_2)/2$ et $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}_2$, u n'est pas un point extrémal de $\mathscr{B}$.

Désormais pour tout convexe A, on note ∂A l'ensemble des éléments extrémaux de A.

THÉORÈME 1. *Soit E espace vectoriel réel de dimension finie. Alors*

1) *Pour toute norme N sur E, on a $\mathscr{G}_N \subset \partial\mathscr{B}_N$.*

2) *L'égalité $\mathscr{G}_N = \partial\mathscr{B}_N$, équivaut à l'assertion: N est euclidienne.*

Démonstration.

1) Soit $u \in \mathscr{G}_N$. Supposons que $u = (u_1+u_2)/2$, avec u_1 et $u_2 \in \mathscr{B}_N$. Si B_N est la boule unité fermée de E, on a $u(\partial B_N) = \partial B_N$. Pour $x \in \partial B_N$, l'égalité $u(x) = (u_1(x)+u_2(x))/2$ implique $u_1(x) = u_2(x) = u(x)$. Les restrictions de u, u_1 et u_2 à ∂B_N sont identiques, donc $u = u_1 = u_2$, et finalement $u \in \partial\mathscr{B}_N$.

2) D'après le lemme 1 ci-dessus, on a $\partial\mathscr{B}_N \neq \mathscr{G}_N$ lorsque N n'est pas euclidienne. Inversement supposons N euclidienne; le lemme 2 permet d'écrire $\partial\mathscr{B}_N \subset \mathscr{G}_N$. Puisque, d'après 1), l'inclusion inverse a lieu, on en déduit $\partial\mathscr{B}_N = \mathscr{G}_N$.

III. Application au cas $n = 2$

Nous considérons désormais $E = \mathbf{R}^2$, espace vectoriel que nous identifions à $\mathbf{C}$. L'espace $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ est, comme ci-dessus, normé par $\| u \| = \sup_{|z| \leqslant 1} | u(z) |$ (attention, $u \mapsto \| u \|$ n'est pas euclidienne!); $\mathscr{B}$ est la boule unité de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$. Rappelons que si $z = x + iy$, on pose

$$\partial u/\partial z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Lemme 1. *L'application* $u \mapsto (\partial u/\partial z, \partial u/\partial \bar{z})$, *de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *vers* $\mathbf{C}^2$, *est un* $\mathbf{R}$-*isomorphisme, et* $\| u \| = | \partial u/\partial z | + | \partial u/\partial \bar{z} |$.

Démonstration.

On a $u(z) = \partial u/\partial z\, z + \partial u/\partial \bar{z}\, \bar{z}$, d'où $| u(z) | \leqslant (| \partial u/\partial z | + | \partial u/\partial \bar{z} |) | z |$ et en posant $\partial u/\partial z = re^{i\theta}$, $\partial u/\partial \bar{z} = \rho e^{i\varphi}$, on obtient

$$| u(e^{i(\varphi - \theta)/2}) | = r + \rho .$$

Lemme 2. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2), u \neq 0, u$ *tel que* $u/\| u \|$ *ne soit pas une isométrie. Alors*:

1) *Il existe* v *et* w *isométries de* $\mathbf{R}^2$, α *et* $\beta > 0$, *tels que* $u = \alpha v + \beta w$ *et* $\| u \| = \alpha + \beta$.

2) *La solution unique du problème est donnée par*

$$\alpha = | \partial u/\partial z | , \quad \beta = | \partial u/\partial \bar{z} | , \quad \alpha v(z) = \partial u/\partial z\, z , \quad \beta w(z) = \partial u/\partial \bar{z}\, \bar{z} .$$

Démonstration. La solution explicitée convient d'après le lemme 1. Démontrons l'unicité:

Soit z_0 non nul, tel que $| u(z_0) | = (\alpha + \beta) | z_0 |$. On a par ailleurs

$$| u(z_0) | \leqslant | \alpha v(z_0) + \beta w(z_0) | \leqslant (\alpha + \beta) | z_0 | .$$

L'égalité des termes extrêmes, jointe au signe de α et β, implique $v(z_0) = w(z_0)$; et ceci ne peut se produire que lorsque v et w sont respectivement holomorphes et antiholomorphes, car $v \neq w$.

Il existe donc A et B dans $\mathbf{C}^*$, tels que

$$\alpha v(z) = Az , \quad \beta w(z) = B\bar{z} ,$$

d'où $u(z) = Az + B\bar{z}$, ce qui entraîne $A = \partial u/\partial z$ et $B = \partial u/\partial \bar{z}$, et l'on en déduit les valeurs de α et β, puis v et w.

Notation. On qualifiera désormais de paire (resp. d'impaire) toute isométrie de déterminant $+1$ (resp. -1).

Remarque. On vérifie que la frontière de B ne contient aucun convexe de dimension $\geqslant 2$; la norme $u \mapsto \| u \|$ est « presque » strictement convexe. Le fait est important pour l'étude des isométries linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, à laquelle nous allons nous consacrer désormais.

LEMME 3. *Soit* Φ *une isométrie linéaire de* $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ *dans lui-même. Alors:*

1) Φ *conserve (resp. inverse) la parité des isométries de* $\mathbf{R}^2$.

2) *Les applications*

$$\partial u/\partial z \mapsto \partial/\partial z\, \Phi(u) \quad \textit{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} \mapsto \partial/\partial \bar{z}\, \Phi(u)$$
$$(\textit{resp. } \partial u/\partial z \mapsto \partial/\partial \bar{z}\, \Phi(u) \quad \textit{et} \quad \partial u/\partial \bar{z} \mapsto \partial/\partial z\, \Phi(u))$$

appartiennent au groupe orthogonal $O(2)$.

Démonstration. 1) Soit v et w des isométries de parités opposées; quels que soient $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta = 1$, on a $\| \alpha v + \beta w \| = 1$ donc $\| \Phi(\alpha v + \beta w) \| = 1$. Or $\Phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$. Puisque $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont des points extrémaux de $\mathscr{B}$, ce sont des isométries de $\mathbf{R}^2$; à l'inverse $\alpha v + \beta w$ et $\alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w)$ ne sont pas des isométries; d'après le lemme 2, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ sont de parités opposées. Ainsi pour toute isométrie impaire w, $\Phi(w)$ est de parité opposée à celle de $\Phi(I)$, ce qui implique que pour toute parité paire v, $\Phi(v)$ est de même parité que $\Phi(I)$.

2) Plaçons-nous dans le premier cas, et utilisons l'identification de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ avec $\mathbf{C}^2$ découlant du lemme 1.

Si $Z = (z_1, z_2) = (z_1, 0) + (0, z_2)$ alors $\Phi(Z) = \Phi[(z_1, 0)] + \Phi[(0, z_2)]$ d'où dans le cas envisagé:

$$\Phi(Z) = (\varphi_1(z_1), 0) + (0, \varphi_2(z_2)).$$

Les applications φ_1 et φ_2 sont clairement $\mathbf{R}$-linéaires de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et en faisant successivement $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$, on obtient $|\varphi_1(z_1)| = |z_1|$ et $|\varphi_2(z_2)| = |z_2|$. On ramène le second cas au premier en composant Φ avec l'application $\pi: (z_1, z_2) \to (z_2, z_1)$, qui est bien une isométrie de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Prenons dans chaque facteur du produit $\mathbf{C}^2$ une base orthonormée; la matrice de Φ est alors de l'un des deux types suivants:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Φ_1 et Φ_2 sont des matrices 2×2 orthogonales). Selon les signes respectifs des déterminants de Φ_1 et Φ_2 on obtient 8 composantes connexes dans le groupe Γ des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$.

Soit Γ_1 la composante neutre de Γ, qui est clairement isomorphe à $SO(2) \times SO(2)$. Introduisons

$$\sigma_1 : (z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_1, z_2), \qquad \sigma_2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_2),$$

et dressons la liste des composantes de Γ:

$$\begin{array}{llll} \Gamma_1 & \sigma_1\Gamma_1 & \sigma_2\Gamma_1 & \sigma_2\sigma_1\Gamma_1 \\ \pi\Gamma_1 & \pi\sigma_1\Gamma_1 & \pi\sigma_2\Gamma_1 & \pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1 \end{array}$$

Les 4 composantes de la 1re ligne forment un groupe isomorphe à $O(2) \times O(2)$; c'est le groupe des isométries de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ qui conservent la parité, c'est-à-dire qui ont une matrice du 1er type. Les 2 composantes de la colonne de gauche constituent le groupe des isométries $\mathbf{C}$-linéaires de $\mathbf{C}^2$. Dans ce groupe Γ' opère naturellement le groupe $\{I, \pi\}$ noté c_2, si bien que Γ' est isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Enfin les composantes situées dans les 2 colonnes extrêmes du tableau forment le groupe des isométries de déterminant 1; on note $S\Gamma$ ce groupe.

Pour v et $w \in O(2)$, et $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, posons $\Phi_{v,w}(u) = vuw^{-1}$.

THÉORÈME 2. *L'application* $(v, w) \mapsto \Phi_{v,w}$ *est une représentation linéaire de* $O(2) \times O(2)$ *sur le groupe* $S\Gamma$, *dont le noyau a 2 éléments.*

Démonstration. $\Phi_{v,w}$ est une isométrie, en effet:

$$\| vuw^{-1} \| \leqslant \| v \| \, \| u \| \, \| w^{-1} \| = \| u \| = \| v^{-1}vuw^{-1}w \| \leqslant \| vuw^{-1} \| .$$

L'application $(v, w) \mapsto \Phi_{v,w}$ est évidemment un morphisme de groupes; montrons que cette application envoie $SO(2) \times SO(2)$ sur Γ_1.

Soit $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \mu z_2)$ un élément de $\Gamma_1 (|\lambda| = |\mu| = 1)$. Il s'agit de trouver v et w de module 1 tels que $vw^{-1} = \lambda$ et $\overline{vw^{-1}} = \mu$ c'est-à-dire $v^2 = \lambda\mu$ et $w = v\lambda^{-1}$; le problème admet donc deux couples opposés pour solutions.

On en déduit enfin que l'application étudiée applique $O(2) \times O(2)$ sur $S\Gamma$, composante sur composante, selon le schéma suivant:

pour v paire, w impaire: $\Phi_{v,w} \in \pi\Gamma_1$,

pour v impaire, w paire: $\Phi_{v,w} \in \pi\sigma_2\sigma_1\Gamma_1$,

pour v et w impaires: $\Phi_{v,w} \in \sigma_2\sigma_1\Gamma_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMIR, D. *Characterizations of Inner Product Spaces.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 20, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1986.
[2] BOURBAKI, N. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. II. Hermann 1966.
[3] GARDNER, L. T. An elementary proof of the Russo-Dye theorem. *Proceedings of the AMS 90* (1984), 171.
[4] HOCHSCHILD, G. *The structure of Lie Groups.* Holden Day Inc. 1965.
[5] JORDAN, P. and J. VON NEUMANN. On inner products in linear metric spaces. *Annals of Maths 36* (1935), 719-723.
[6] KADISON, R. V. Isometries of operator algebras. *Annals of Maths 54* (1951), 325-338.
[7] LEDUC, M. Dérivabilité dans les espaces normés (thèse Orsay 1971).
[8] ROBBIN, J. W. Lie algebras of infinitesimal isometries. *Linear Alg. Appl. 10* (1975), 95-102.
[9] ROBERT, A. Meilleure approximation linéaire et espaces euclidiens. *L'Enseignement Mathématique 28* (1982), 281-293.
[10] ROSENTHAL, H. The Lie algebra of a Banach space. *Lecture Notes in Math. 1166*, Springer 1985, 129-157.
[11] RUSSO, B. and H. A. DYE. A note on unitary operators in C^*-algebras. *Duke Math. J. 33* (1966), 413-416.

(Reçu le 30 mars 1987)

Georges Lion

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges Cedex (France)

vide-leer-empty