I. Groupe des isométries linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Notre travail s'achève par l'étude d'un exemple qui illustre doublement ce qui précède: à la structure euclidienne dans $\mathbf{R}^2$, correspond la norme des opérateurs dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, $\mathbf{R}$ espace de dimension 4; ainsi apparaît une norme non euclidienne dans $\mathbf{R}^4$. Mais l'introduction des opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ permet de surcroît d'identifier $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ à $\mathbf{C}^2$, et de reconnaître dans la norme étudiée la norme l^1 de $\mathbf{C}^2$. Si Γ désigne le groupe des isométries $\mathbf{R}$ linéaires de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on peut distinguer dans Γ trois sous-groupes intéressants:

1) *Un sous-groupe isomorphe à* $O(2) \times O(2)$.

2) *Le groupe des éléments de* Γ *de déterminant* $+1$, image de $O(2) \times O(2)$ par la représentation d'indice 2 définie ainsi: Si v et w appartiennent à $O(2)$, on note $\Phi_{v,w}$ l'application $u \mapsto vuw^{-1}$, de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même; $\Phi_{v,w}$ est une isométrie de déterminant 1, et toute telle isométrie peut s'écrire $\Phi_{v,w}$ pour un double choix du couple (v, w).

3) *Le groupe des éléments* $\mathbf{C}$*-linéaires de* Γ, dans lequel opère naturellement le groupe c_2 à 2 éléments, ce qui le rend isomorphe au produit semi-direct de $SO(2)$ par lui-même.

Je remercie le référé pour la documentation intéressante qu'il m'a signalée.

I. Groupe des isométries linéaires

Dans ce paragraphe p désigne une fonction définie et continue dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs strictement positives hors de 0, positivement homogène (pour que p soit une norme il faudrait en plus que p soit symétrique et sous additive).

On note $\mathscr{G}_p$ l'ensemble des applications linéaires u de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, telles que $p \circ u = p$.

Lemme 1. *$\mathscr{G}_p$ est un groupe compact.*

Démonstration. $\mathscr{G}_p$ est stable pour la composition des applications; tout u de $\mathscr{G}_p$ est inversible car la relation $u(x) = 0$ implique $p(x) = p \circ u(x) = 0$, d'où $x = 0$. $\mathscr{G}_p$ est fermé en vertu de la continuité de p.

Etant continue, p atteint sur la sphère euclidienne unité une borne inférieure $a > 0$, et une borne supérieure A; on a donc, pour $u \in \mathscr{G}_p$:

$$A \parallel x \parallel \geqslant p(x) = p \circ u(x) \geqslant a \parallel u(x) \parallel .$$

Par conséquent $\mathscr{G}_p$ est un sous-ensemble borné de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, normé par

$$\| u \| = \sup_{\| x \| = 1} \| u(x) \| .$$

LEMME 2. *Pour tout groupe compact $\mathscr{G}$ contenu dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe une forme quadratique Φ, à valeurs strictement positives hors de 0, et invariante par $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar du groupe $\mathscr{G}$, et φ une forme quadratique, à valeurs > 0 hors de 0; en posant $\Phi = \int_{\mathscr{G}} \varphi \circ u d\mu(u)$, on définit une forme quadratique qui a les propriétés requises.

D'une autre façon, on peut appliquer un théorème démontré par Hochschild ([4], XV 3-1): G_1 étant la composante connexe de l'élément neutre du groupe de Lie G, on suppose G/G_1 fini; il existe alors un sous-groupe compact K, tel que tout autre sous-groupe compact de G soit contenu dans un conjugué de K; dans le cas présent on prend $G = GL(n, \mathbf{R})$, et le rôle de K peut être joué par $O(n)$ qui en est un sous-groupe compact maximal.

II. LA BOULE UNITÉ DE $\mathscr{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, muni d'une norme N, et $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E muni de la norme $\mathscr{N}$ des opérateurs:

$$\mathscr{N}(u) = \sup_{N(x) = 1} N \circ u(x) .$$

Soit $\mathscr{B}_N$ la boule unité fermée de $\mathscr{L}(E)$.

LEMME 1. *Soit N non euclidienne, $\mathscr{G}_N$ l'ensemble des isométries linéaires pour N, $\mathscr{K}_N$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathscr{G}_N$. Alors l'inclusion $\mathscr{K}_N \subset \mathscr{B}_N$ est stricte.*

Démonstration. Le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation du paragraphe I, et de prouver l'existence d'une forme quadratique > 0 hors de 0, invariante par $\mathscr{G}_N$. Munissons E de la structure euclidienne définie par cette forme quadratique; de cette façon $\mathscr{G}_N$ est contenu dans le groupe des isométries euclidiennes de E