§4. La trace T

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si la suite $f(1), ..., f(n)$ est décroissante, q est égal au cardinal de l'image de f diminué d'une unité, et p est égal à $n - 1 - q$. Comme de plus la base $B(\varphi)$ ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. *Soit* φ *une fonction de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$ *de poids* $n = p + q$. *Soient* u *et* v *deux éléments de* Λ_p *et* Λ_q. *Alors on a*

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u) T_{\varphi-\varphi'}(v),$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ' *de poids* p, *comprises au sens large entre* 0 *et* φ.

Démonstration. Désignons par $H_p \times H_q$ l'image par l'application $\times$ de $H_p \otimes H_q$ dans H_n. Le module $M(\varphi)$ est isomorphe, en tant que $H_p \times H_q$-module à la somme directe des modules $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$, φ' appartenant à l'ensemble des fonctions de poids p et comprises entre 0 et φ. Soient x et y des représentants de u et v dans H_p et H_q. Comme la trace de $u \otimes v$ agissant sur $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$ est égal au produit de la trace de u agissant sur $M(\varphi')$ par la trace de v agissant sur $M(\varphi - \varphi')$, on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. *Soit* φ *une fonction à support fini de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$. *Soit* ε *une bijection de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{Z}$. *Alors les formes linéaires* T_φ *et* $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ *sont égales.*

Démonstration. D'après le lemme 3-6 T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent la même valeur sur les éléments c_n de Λ. D'après la proposition 3-7, si, pour tout φ, T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ prennent les mêmes valeurs en u et en v, elles prennent, pour tout φ, la même valeur en uv. On en déduit que T_φ et $T_{\varphi\circ\varepsilon}$ sont égales quel que soit φ.

Il en résulte que T_φ ne dépend que de la partition du poids n de φ en les nombres $\varphi(p)$. Cette partition est caractérisée par la suite finie $p_1, p_2, \ldots; p_i$ désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. On notera alors T_φ sous la forme T_u, où u est le mot $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$.

§ 4. LA TRACE T

Soit $x = (x_i)$ une famille de symboles. On désignera par $A(x)$ l'algèbre des séries en les x_i à coefficients dans $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$. Un élément de

$A(x)$ est donc une combinaison linéaire finie ou infinie de monômes finis en les x_i, à coefficients dans K. En affectant à chaque x_i un degré 1, $A(x)$ devient une algèbre graduée. Si x et y sont deux familles de symboles, $A(x, y)$ désignera l'algèbre $A(z)$, z étant l'union disjointe des deux familles.

Le i-ième polynôme symétrique élémentaire en les variables x_i sera noté $c_i(x)$. L'algèbre des séries symétriques de $A(x)$ est donc l'anneau gradué des séries formelles $K[[c_1(x), c_2(x), \ldots]]$, $c_i(x)$ étant affecté du degré i.

Soit x une famille de symboles indexée par $\mathbf{Z}$. Les éléments $c_i(x)$ seront notés c_i. On définit alors une application T de Λ dans $K[c_1, c_2, \ldots]$ de la façon suivante:

$$\forall n \geqslant 0\,, \qquad \forall u \in \Lambda_n\,, \qquad T(u) = \sum_{\varphi} T_{\varphi}(u) \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$.

Pour tout u de Λ_n, $T(u)$ est une série homogène de degré n et symétrique, c'est donc un polynôme homogène de degré n en les c_i.

THÉORÈME 4-1. *T est un morphisme de k-algèbres graduées de Λ dans $K[c_1, c_2, \ldots]$ et les images par T des classes c_i de Λ sont données par la formule suivante:*

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \frac{1 + \mu x_i}{1 - \lambda x_i} = \frac{1 + \mu c_1 + \mu^2 c_2 + \ldots}{1 - \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 - \ldots}\,.$$

Démonstration. Il est clair que T est k-linéaire. Le fait que T respecte le produit est conséquence de la proposition 3-7. D'après le lemme 3-6, on a pour tout $n > 0$,

$$(\lambda+\mu)T(c_n) = \sum \lambda^{n-k}(\lambda+\mu)^k \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

la sommation ayant sur toutes les fonctions φ de poids n de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, k désignant le cardinal du support de φ.

Si a est un entier de $\mathbf{N}$, désignons par $\bar{a}$ le nombre qui vaut 0 ou 1 suivant que a est nul ou non. Le cardinal k du support de φ est donc égal à la somme des nombres $\overline{\varphi(i)}$ et l'on a

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \sum_{\varphi} \prod_i (1+\mu\lambda^{-1})^{\overline{\varphi(i)}} (\lambda x_i)^{\varphi(i)}\,,$$

la somme ayant lieu sur toutes les fonctions φ à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Ce qui implique

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) = \prod_i \sum_{a\geq 0} (1+\mu\lambda^{-1})^{\bar{a}}(\lambda x_i)^a$$

$$= \prod_i \left(1+(1+\mu\lambda^{-1})\frac{\lambda x_i}{1-\lambda x_i}\right)$$

$$= \prod_i \frac{1+\mu x_i}{1-\lambda x_i} = \frac{1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots}{1-\lambda c_1+\lambda^2 c_2-\dots}\,.$$

4-2. *Démonstration du théorème 1-5.* On sait déjà que l'algèbre Λ est engendrée par les classes c_i, $i > 0$. Or, modulo les décomposables de l'algèbre $K[c_1, c_2, \dots]$, on a

$$1 + (\lambda+\mu) \sum_{i>0} T(c_i) \equiv (1+\mu c_1+\mu^2 c_2+\dots)(1+\lambda c_1-\lambda^2 c_2+\dots)$$

$$\equiv 1 + (\lambda+\mu)c_1 + (\mu^2-\lambda^2)c_2 + (\mu^3+\lambda^3)c_3 + \dots$$

$T(c_i)$ est donc, modulo les décomposables de $K[c_1, c_2, \dots]$, un multiple non nul de c_i et les éléments $T(c_i)$ sont algébriquement indépendants. Il en est donc de même des classes c_i de Λ et Λ est la k-algèbre des polynômes en les variables c_i.

Il est possible de donner une forme assez concise de la trace T de la façon suivante. Soient x et y des familles de symboles. Si f est une série de l'anneau $A(x, y)$, symétrique en x et en y, f est une combinaison linéaire de monômes de la forme uv, u étant un monôme en les éléments $c_i(x)$ et v un monôme en les éléments $c_i(y)$. Si l'on remplace dans chacun de ces monômes, u par le monôme correspondant en les classes c_i et v par l'application $T_{v'}$ où v' est obtenu en remplaçant dans v chaque $c_i(y)$ par la classe c_i, on obtient une application linéaire de $K[c_1, c_2, \dots]$ dans lui-même que l'on notera $\hat{f}$.

THÉORÈME 4-3. *La trace T est égale à $\hat{f}$, f étant la série*

$$f = \prod_{ij} (1+x_i y_j)\,.$$

Démonstration. Par définition la trace T est égale à $\hat{f}$, avec

$$f = \sum_\varphi u(\varphi) \prod_i x_i^{\varphi(i)}\,,$$

$u(\varphi)$ étant le monôme $c_1(y)^{p_1} c_2(y)^{p_2} \dots$ et p_i désignant le nombre de fois où φ prend la valeur i. C'est-à-dire que l'on a

$$u(\varphi) = \prod_i c_{\varphi(i)}(y) \qquad \text{en convenant que } c_0(y) \text{ est égal à } 1\,.$$

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_i c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_i \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_i \prod_j (1 + x_i y_j) .$$

§ 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur Λ possédant la propriété suivante:

(P) $\forall n > 0, \forall u \in H_n, \quad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}]$.

Comme σ_n^{-1} est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] .$$

D'autre part, l'application de H_n dans H_{n+1} qui à u associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application θ de E_{n-1} dans E_n (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1}, \quad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u) ,$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E , \quad f(u) \equiv f(\theta u) \quad \text{et} \quad (1 + \beta - ac_1) f(u) \equiv 0 ,$$

f désignant la projection canonique de E sur Λ.

D'autre part, E est un Λ-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, ...)$ et l'on a

$$\forall n > 0 , \quad \theta s_n = s_{n+1} \quad \text{et} \quad f(s_n) = c_{n+1} .$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0 , \quad \forall u \in \Lambda , \quad uc_n \equiv uc_{n+1} \quad \text{et} \quad uc_n(1 + \beta - \alpha c_1) \equiv 0 ,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal J de Λ engendré par les éléments

$$c_n - c_1 , \quad n > 1 \quad \text{et} \quad c_1(1 + \beta - \alpha c_1) ,$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit τ une tresse de $B_n, n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal I_0 de Λ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme cP, où c représente