# L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE «DE BERNOULLI»

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

chaque point $P$ la tangente est de longueur constante $a$ entre $P$ et l'axe $x$ (fig. 10)? Pour illustrer cette question, il tire de son gousset une «horologio portabili suae thecae argenteae» et la fait glisser sur la table. Aucun autre mathématicien de sa connaissance n'avait été capable d'en trouver la formule.

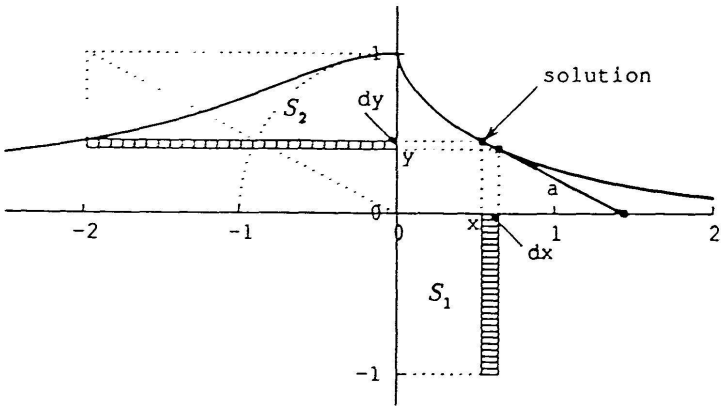


FIGURE 10.
La tractrice.

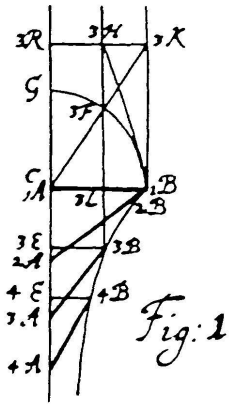


FIGURE 11.
La tractrice (dessin de Leibniz).

Leibniz publie sa solution en 1693 dans les A.E. [19], en affirmant qu'il la connaît depuis longtemps: Puisque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad \text{i.e.} \quad -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy = dx \tag{13}$$

on trouve («ergo & horum...») la solution par quadratures de la courbe $\sqrt{a^2 - y^2}/y$ (fig. 10). En formules (voir Exercice 4)

$$x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \tag{14}$$

## L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE «DE BERNOULLI»

En généralisant le problème de Debeaune, Jacob tombe sur l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y + q(x) y^n \tag{15}$$

et «sue sang et eau» pour la résoudre. Il défie son frère et lance officiellement ce problème dans les A.E. de 1695 ([2]). «Par malheur», Johann a aussitôt

deux idées élégantes ([8]). La première est rapportée dans l'exercice 7. Pour la deuxième, il pose $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ comme produit de deux fonctions (version originale: $y = m \cdot z$). Ceci donne

$$\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = p(x) \cdot u \cdot v + q(x) \cdot u^n \cdot v^n .$$

On peut maintenant égaliser les deux termes séparément et on trouve

$$(16a) \qquad \frac{du}{dx} = p(x) \cdot u \qquad \text{pour obtenir } u ,$$

$$(16b) \qquad \frac{dv}{dx} = q(x) u^{n-1} \cdot v^n \qquad \text{pour obtenir } v .$$

Pour le cas spécial $n = 0$, la formule (15) est l'équation linéaire inhomogène et les formules (16*a*) et (16*b*) deviennent ce qu'on appelle «la formule de la variation de la constante».

## La Brachystochrone

> «Il y a précisément un an que je proposai le Problème de la plus vite descente, dans les *Actes de Leipsic* comme tout nouveau, ne sçachant pas alors qu'il avait été tenté déjà par GALILEE».
>
> (Joh. Bernoulli, juin 1697)

> «...et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées.»
>
> (Fermat à De La Chambre, 1657)

> «Mais, parce que j'en jugeai l'invention très difficile et très embarrassée, puisque ces questions de maximis et minimis conduisent d'ordinaire à des opérations de longue haleine et qui se brouillent aisément par une infinité d'asymmétries qu'on trouve sur son chemin, je laissai là ma pensée pendant plusieurs années, en attendant que quelque géomètre moins paresseux que moi en fît ou la découverte ou la démonstration. Personne ne voulut entreprendre ce travail; ...»
>
> (Fermat, 1664)

En automne 1696, Jacob Bernoulli traite dans ses études personnelles le problème de la brachystochrone et, comme Galilée, croit que la solution est un cercle. Voici une bonne occasion pour Johann de blâmer son frère aux yeux